

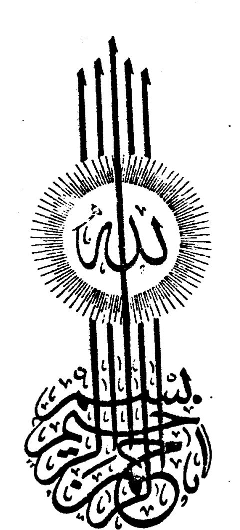
كلية البنات

أسس المنطق الرياضى

(رؤيـة حـديثة)

دكتورة / سـهام النـويهى

كليـة البنات - جامعة عـين شمس



" بسم الله الرحمن الرحيم "

واحمد الله وبه استعين
والصلاة والسلام على سيد المرسلين وآله وصحبه أجمعين

مقدمـــة :

لقد كان ارسطو اول من وضع المنطق الصورى القديم فى القرن الرابع قبل الميلاد . وظل هذا المنطق متربعا على عرش الفكر الانسانى ما يزيد على الفى عام . ولم تهتز دعائم منطق ارسطو الا مع فرنسيس بيكون الذى رأى فى القياس الأرسطى اداه عاجزه عن تطوير العلم وذلك فى كتابه " الاورجانون الجديد " Novum Organon الذى نشر عام ١٦٢٠. واوضح بيكون عدم جدوى المنطق القديم ومن الاجدى دراسه المنهج العلمى الذى يلائم طبيعه العلوم الحديثه .

ولقد تبلور هذا المنهج العلمى وتحدد تحديدا جيدا مع جون ستيوارت ميل فى القرن التاسع عشر . واوضح ميل اهمية المنطق الاستقرائى من اجل امدادنا بقواعد واشكال البراهين الاستقرائيه[1].

والى جانب هذا الاتجاه العلمى ، ظهر اتجاه منطقى فى نقد منطق ارسطو لعدم اتصافه بالصوريه البحته ولما به من شوائب ماديه . وانقسم الناقدون فى هذا الاتجاه المنطقى الى فئتين . أولهما ترى امكانيه اصلاح عيوب المنطق الارسطى واعادة صياغته صياغه حديثه . ويمثل هذه الفئه يان لوكاشيڤتش Jan Lukasiewicz الذى طرق هذه المحاولة ، كما وانه اجتهد فى تفسير منطق ارسطو تفسيرا رمزيا مثلما ورد فى كتابه " نظريه القياس الارسطيه " Aristotle's Syllogistic .

(١) لقد تناولنا المنطق الاستقرائى تفصيلا فى بحث الماجستير " المنطق ومناهج البحث عند جون ستيوارت ميل " جامعة عين شمس ، ١٩٧٧ .

اما الفئه الثانيه فترى أن المنطق القديم لم يكن صوريا بحتا وانه عاجز تماما عن استيفاء ما يتطلبه الفكر فى العلوم المعاصره . لذلك رأت هذه الفئه ضرورة وضع منطق جديد يتسم بالصوريه الخالصه ويحقق ما عجز المنطق القديم عن تحقيقه وكان هذا المنطق الجديد هو المنطق الرياضى . والواقع ان البدايه الحقيقيه لهذا المنطق الجديد عادة ما يؤرخ لها مع جورج بول G. Boole (١٨١٥ – ١٨٦٤) الذى يوصف بانه المؤسس الحقيقى للمنطق الرياضى .

ولقد سلكت فى هذا الكتاب مسلك الفئه الثانيه – من الاتجاه المنطقى – والتى رأت ضروره استبدال المنطق الرياضى بالمنطق القديم . ولا ترجع اهمية المنطق الرياضى الى الجانب النظرى فقط بل الى الجانب التطبيقى كذلك . ولقد اتضحت الاهميه التطبيقية له فى كثير من المجالات مثل علوم الرياضيات وعلوم الفيزياء والاحياء وكذلك "فى علوم الانسانيات" . كما ان الحاسبات الالكترونيه من المجالات التى تشهد بالتطبيق الناجح للمنطق الرياضى بها .

والواقع ان المنطق الرياضى ذو طبيعه ديناميكيه ، اى انه يتصف بالتغير والتجديد ولا يقف على حالة بذاتها . بمعنى انه وان كان المنطق القديم قد وصل الى طوره الذروى فى محتواه وموضوعاته والى حالة ثبات واستقرار ولذا يطلق عليه " المنطق التقليدى " ، الا ان المنطق الرياضى يختلف تمام الاختلاف من حيث أنه علم متجدد دائم التغير بما يواكب العلم المعاصر ويلاحقه .

والحقيقه ان هذه الطبيعه الديناميكيه توضح الاهميه الملحه لمتابعة أحدث ما توصلت اليه الدراسات والبحوث من نظريات ومفاهيم . وكانت هذه الطبيعه التطوريه للمنطق الرياضى هى

الباعث الرئيسى لهذه الدراسه التى اردنا منها توضيح بعض التطورات ـ وبصفة خاصه ـ فى موضوع " حساب الدالات " وطرح ما يلزم من اضواء تزيد من تفهمنا لبعض التصورات ذات الاهميه المنطقيه وبصفه خاصه تصور " الفئه " .

كما وان النقص البين فى مكتبتنا العربيه التى تكاد تخلو الا من قله من المؤلفات فى هذا المضمار ،كادت ان تتسم فى أغلبها بالكلاسيكيه كان حافزا أيضا لوضع هذا الكتاب .

وحينما يتضح الهدف من هذه الدراسه على النحو السابق فإن مباحثها التى نتناولها تكون بالضروره اسس (أو أركان) الموضوعات الرئيسيه للمنطق الرياضى ، وهى على وجه التحديد : حساب القضايا ، حساب دالات القضايا ، حساب الفئات وحساب العلاقات. كما وانه لم يفوتنا ان نقدّم لهذه الموضوعات بعرض تاريخى موجز لظهور وتطور المنطق الرياضى الجديد .

ولقد اوضحنا عند عرضنا لموضوع " حساب الدالات " انه لا يجدر الاكتفاء عند تعريف دالة القضيه بانها مجرد تعبير يحتوى على متغير او اكثر ، ويستحيل الحكم عليها بالصدق او بالكذب ، ذلك لأن هذا التعريف لدالة القضيه ان هو الا تعريف يبلغ حدا من الاتساع الى الدرجه التى تجعله متضمنا تعبيرات أخرى غير تلك التى نقصد بها ان تكون دالة قضيه فى " حساب الدالات " .

كما آكدنا على ان الداله القضائيه ليست مجرد عباره محتويه على فراغ يجب ملؤه ، او عباره محتويه على متغير ، بل ان الداله القضائيه يقصد بها المحمول (سواء كان صفه او علاقه) عندما ينتج عن استخدامه قضيه . ومن ذلك نخلص الى ان محور الارتكاز فى تعريف دالة القضيه ليس المتغير بل المحمول . ورأينا ضرورة

الاقتصار فى استعمال مصطلح " دالة القضيه " على المحمول واطلاق مصطلح " داليه " .... Functional (الذى استخدمه راشينباخ) على سائر العبارات المحتويه على متغيرات . ولقد اوضحنا ما يفرق بين كل من " الداله " و " دالة القضيه " و " الداليه " .

وكان من الضرورى ان تكون لدالات القضايا قوائم صدق خاصه بها تختلف عن تلك الخاصه بالقضايا . ذلك ان دالات القضايا تنقسم من حيث الصدق الى دالات صادقه دائما ودالات كاذبه دائما ودالات مختلطه والتى يمكن اعتبارها ممثله للجهات أى ممثله لمفاهيم الضروره والامكان والاستحاله . وهذا النوع من قوائم الصدق لم يسبق تناوله – الى حد علمنا – فى المؤلفات العربيه . والواقع ان دوبيسلاف Dubislav هو أول من وضع هذا النوع من القوائم وتبعه فى ذلك رايشنباخ .

كما قدمنا العديد من البراهين الصوريه لاختبار صحه المبرهنات القائمه على التكوين الداخلى للقضايا .

وأوضحنا عند تناولنا لحساب الفئات التفرقه التى اجراها راسل بين كل من " الفئه " و " فئه التصور " و " وتصور الفئه " لما لهذه التفرقه من نتائج ذات اهميه بالغه والتى اهمها التفرقه بين انماط اللغه ، والتفرقه بين المفهوم والماصدق من اجل حل متناقضه الهويه ، وكذلك حسم مشكله الفئات الصفريه .

وهكذا يتضح الغرض من هذا الكتاب ، كما يتضح ما تناولته من موضوعات واهم ما انتهت اليه هذه الدراسه والتى ذيلناها بكشافين أحدهما خاص بالرموز والآخر بأهم المصطلحات المنطقية

التى وردت بالمتن .

ونأمل ان نكون قد وفقنا الى اضافه جديده فى علم المنطق الرياضى ، كما اننا نأمل ان يكون ذا نفع لدارسى علم المنطق والمهتمين به .

والله وحده سبحانه ولى التوفيق .

سهام النويهى

يناير ١٩٨٧

الفصل الأول

الفصل الاول
نشأة المنطق الرياضى وتطوره

ان المنطق الرياضى منطق جديد وليس هو المنطق القديم فى ثوب جديد . ولا يعنى ذلك ان المنطق الرياضى قد انبثق من فراغ ، بل هناك العديد من العوامل التى تضافرت وأدت الى ظهوره .

ويبدو انه من الأهميه بمكان تناول هذه العوامل قبل ان نخطو فى طريق المنطق الرياضى لنتفهم نشأته .

العوامل التى أدت الى ظهور المنطق الرياضى

ان اهم العوامل التى ساعدت على نشأة المنطق الرياضى هى عيوب المنطق الارسطى القديم ، الدعوه الى ضرورة قيام لغة عالميه آليه ، وكذلك التطورات الجديدة التى حدثت لعلوم الرياضيات وخاصة بعد عام ١٨٢٥ . وسوف نتناول كل منها بشىء من الايجاز على النحو التالى :

أولا: عيوب المنطق الأرسطى القديم :

تمثل نظرية القياس اهم مبحث من مباحث المنطق الارسطى وهى نظريه للاستدلال القياسى . وبالطبع لم تخلو نظرية ارسطو القياسية من الاخطاء والعيوب . واهم ما وجه من نقد لهذه النظرية يمكن ايجازه على النحو الاتى : ـ

١) يحدد ارسطو مقدمات القياس بمقدمتين فقط ، وفى الواقع ليس هناك ما يبرر اقتصار مقدمات القياس على مقدمتين فقط . ذلك انه يوجد انواع اخرى من الاستدلال لا تلتزم بهذا التحديد وتتسم بالصحه وعلى المنطق ان يتناولها باعتبار

ان وظيفته الاهتمام بكل نوع من انواع الاستدلال الصحيح[١].

وكمثال على استدلال صحيح بأكثر من مقدمتين الاستدلال الاتى:

أ = ب
ب = جـ
جـ = د
د = هـ
∴ أ = هـ

٢) لا يمكن اعتبار منطق ارسطو نسقا محكم الاعداد مثل انسقه الرياضيات ، حيث تعتمد العبارات أو التقريرات – في الانسقه الرياضيه – كل منها على الآخر ، بحيث اذا اعتبرنا بعضا من هذه التقريرات كمقدمات فاننا نصل الى باقي التقريرات بواسطة الاستنباط .

٣) لم يتوسع المنطق الارسطى فى استعمال الرموز والعلامات بدلا من الألفاظ رغم اهميتها فى التوصل الى الوضوح والدقه.

٤) ان كان ارسطو قد قدم نظرية للاستدلال الا انها لم تبنى على الروابط المنطقيه مثل " ليس " ، " و " ، " أو " ، " فقط اذا " وهى الروابط التى تستخدم فى تكوين العبارات

---

(١) Nidditch, P. H., The Development of Mathematical Logic, The Free Press Glenco, Illinois, 2nd. impression, 1963, p. 10.

المركبه وتتوقف صحة النظرية الاستدلالية عليها [١].

٥) لم يهتم المنطق القديم بعمليات الاستدلال القائمه على العلاقات مثل :

" اذا كانت أ اكبر من ب وكانت ب اكبر من جـ ، اذن بالضروره فان أ تكون اكبر من جـ " .

فلقد اقتصر المنطق الارسطى على العلاقه الحمليه ولم يهتم بأى نوع آخر من العلاقات، والاقتصار على جمل المحمول له آثاره الخطيره ليس فقط على المنطق بل على الموضوعات الفلسفيه الأخرى . وقد كان راسل محقا حين جعل من هذا الخطأ المنطقى سببا فى بعض الاخطاء الميتافيزيقيه [٢]. اذ لو اسندت كل جمله محمولا الى موضوع سيكون هناك بعد الكل موضوع واحد فقط ، الا وهو المطلق وتكون كل حاله من حالات الواقع متضمنه فى هذا المطلق . وبذلك يمكن ارجاع النظريات الميتافيزيقيه عن الجواهر الغامضه الى هذا الخطأ [٣].

ويتضح مما سبق ان المنطق التقليدى يعجز تماما عن استيفاء ما يتطلبه الدور الجديد ـ الذى يجب ان يقوم به فى الفكر ـ من ثراء فى المضمون ودقه صوريه وفائده تتحقق عن طريقة استخدامه . لان المنطق الصورى ظل معتمدا على النسق المدرسى ـ الارسطى الذى لم يحرز حتى فى اقصى حالات تطوره الا تقدما طفيفا فى حد ذاته [٤].

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٢) Carnap, R., The Old and The New Logic, From : Logical positivism, edt. by Ayer, 1959, p. 138.

(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٤) المرجع السابق ، ص ١٣٤

ثانيا: الدعوه الى قيام لغه عالميه آليه :

لقد كان رايمون ليـــــل Ramon Lull (١٢٣٥-١٣١٥)
اول من حاول الاعداد للغه آليه وذلك عندما قام بتاليف كتابـــه
" الفن الكبير " Ars Magna حوالى سنه ١٢٧٠ (١) وقدم ليـــل
فى هذا المؤلف عدة اقتراحات من اجل قيام لغه عالميه لعلم عام.
وتطور هذا الاقتراح مع مؤلف جورج دالجورنو George Dalgorno
(١٦٢٦-١٦٨٧) " فن العلامـــــات" Ars Signorum سنه ١٦٦٠ (٢)

ويبدو ان ديكارت كان اول من فكر بان تكون اللغه العالميه
نوعا من الحساب . ولقد خطا ليبنتز خطوات فعاله نحو تكويــــن
اللغه العالميه بأن قام بعملية تحسيب للفكر كما اوضح فـــى
مؤلفه " فن التركيب " "De Arte Combinatoria" سنه ١٦٦٦
وقد اشار ليبنتز الى كل فكره اوليه بحرف من حروف الابجديــــه ،
بحيث تكون هذه الاشاره ثابته لا تتغير ، وبذلك نستطيع ان نؤلـف
لغه علميه عالميه تمثل جميع التركيبات الممكنه لهذه الحــروف
وجميع المحمولات الممكنه بالنسبه لاى موضوع (٣) . كما اقترح بـان
نرمز للافكار البسيطة بالاعداد الاوليه: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ،...الخ
اى تلك الاعداد التى لا تقبل القسمه الا على نفسها وعلى الواحــد
الصحيح . بينما تكون الافكار المركبه حاصل ضرب لتلك الارقـــام
الاوليه مثل ٦ = (٢x٣) ، ١٠ = (٢x٥) ،فرقم الفكره المركبـــه
يعتمد على ارقام الافكار البسيطه التى تكونت منها . فلكـــى
نعبر عن القضيه " الانسان حيوان عاقل " علينا ان نفترض ان الرقم

---

(١) Nidditch, The Development of Mathematical Logic, p. 14.

(٢) المرجع السابق ،ص ١٥

(٣) د. نازلى اسماعيل ،الفلسفه الحديثه ، مكتبة الحريـــه الحديثة ، ١٩٧٩،ص ٢٩٢

٦ يعبر عن الانسان والعدد ٢ يعبر عن الحيوان والعدد ٣ يعبر عن عاقل وبذلك تصبح القضيه " الانسان حيوان عاقل" معادله تقرر ان ٦ = ٢ × ٣ (١).

ثالثا: التطورات التى حدثت لعلوم الرياضيات :

ان العامل الهام الذى ادى الى تطور المنطق الجديد يكمن فى ظهور الحاجه الى دراسه نقديه تعيد النظر فى اسس الرياضيات فلقد احرزت الرياضيات ـ وخاصة منذ عصر ليبنتز ونيوتن ـ تقدما هائلا وحققت قدرا كبيرا من المعارف الجديده . الا ان اسس الرياضيات لم تتطور بنفس السرعه التى ينمو بها البناء الرياضى نفسه .

ولذلك بدأت محاوله جاده منذ قرن مضى لتوضيح المفاهيم الاساسيه للرياضيات ، وكان هذا الجهد مثمرا فى حالات عديده (٢) فقد نجح الرياضيون فى ايجاد تعريفات دقيقه لبعض من هذه المفاهيم : مثل افكارنا عن الحد ، وعن العدد الاشتقاقى والمركب، تلك المفاهيم التى ظلت لفتره طويله جدا ، تطبق فى الرياضيات التطبيقيه بنجاح بدون ان يكون قد تم تعريفها تعريفا دقيقا .

ولم يقنع المفكرون برد المفاهيم الرياضيه الى المفهوم الاساسى لفكرة العدد ، بل طالبوا كذلك بتوضيح فكره العدد نفسها توضيحا منطقيا . وقد تتطلب هذا البحث فى الاسس المنطقية للحساب مع البحث فى التحليل المنطقى لفكره العدد ـ كهدف للبحث الاول ـ تطلب بطريقه قاطعه ضرورة وجود نسق منطقى يتصف بالشمول والدقة التامه لكى يقوم بهذا العمل (٣).

---

(١) د. على عبد المعطى ، المنطق ومناهج البحث العلمى، دار الجامعات المصرية ، ١٩٧٧ ، ص ٢٠٣

(٢) Carnap, The Old and the New Logic, p. 135.

(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع .

وهكذا اصبحت هذه البحوث بمثابه القوه الدافعه لتطوير هذا المنطق الحديث . ولقد قام كل من بيانو وفريجه وهوايتهد وراسل وهيلبرت ببحوثهم فى المنطق من اجل تحقيق هذا الغرض

كما اصبحت الحاجه ملحه لاعادة بناء المنطق من جديد حينما لوحظ ان التناقضات التى تنشأ فى الرياضيات ذات طبيعه منطقية عامه . تلك التناقضات التى لم يكن من المستطاع التغلب عليها الا باحداث تغيير أساسى فى المنطق.(١)

مسميات المنطق الرياضى وخصائصه

نجد ان هناك العديد من المسميات التى تطلق على المنطق بصورته الجديده . فاحيانا ما يطلق عليه جبر المنطق Algebra of Logic وايضا المنطق الرمزى Symbolic Logic ، والمنطق الرياضى Mathematical Logic او اللوجستيقا Logistic ، وهى كلها مسميات مترادفة . الا انه لم يعد من المعتاد استخدام اسم " جبر المنطق " الان ، والغالب استخدام اسم "اللوجستيقا" خاصه فى الاقطار الاوربية . وكان كل من كوتيرا Couterat واتلسون Itelson ولالاند Lalande هم اول من اقترح تسمية " اللوجستيقا " كأسم للمنطق الرمزى سنه ١٩٠٤.(٢)

اما موضوع المنطق الرياضى فهو الاستدلال بوجه عام . وعلى حد قول راسل فإن " المنطق الرمزى او الصورى - وهما اصطلاحان سأستعملها مترادفين - هو دراسة مختلف الانواع العامة

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

Carnap, Introduction to Symbolic Logic and its Applications, trans. by Meyer, W. H. & Wilkinson, J., New York, 1958, p. 3.

للاستنباط"(١).

ويقوم الاستدلال الاستنباطى على مجموعه من المقدمات تتألف من الافكار الاولية اللامعرفه ،وقائمه بالتعريفات والقضايا الاوليه ومن هذه المقدمات تشتق مجموعه جديده من القضايا بطريق الاستنباط وذلك طبقا لقواعد الاستدلال ، وبذلك فانه من اهم سمات او خصائص المنطق الرياضى انه نسق استنباطى . كما يتسم المنطق الرياضى باستخدامه للرمزيه والاهتمام بالعلاقات بدلا من الاقتصار على المحمولات .

وفيما يلى اهم هذه الخصائص :

أولا: الرمزيه :

ان اهم سمه من سمات المنطق الرمزى هى استخدام الاشكال الرمزيه والتى يبدو انها مماثله لتلك الاشكال الخاصة بالرياضيات . وحقيقه ان هذه الرمزيه وضعت اصلا محاكاه للرياضيات، ولكن هذه الاشكال تطورت فيما بعد لتكون اكثر ملائمه لتحقيق الاهداف الخاصه بالمنطق (٢).

وتتميز اللغه الرمزيه بعدم الغموض والدقه والاختصار والوضوح وهذا مما يسهل المقارنه والاستدلال بدرجه كبيره .

وتتضح فائده المنهج الرمزى ــ من الناحية التمثيليه ــ عن استخدام اللغه العاديه فى العلوم الرياضيه . ولنأخذ مثالا لذلك الجمله التالية :(٣)

---

(١) راسل ، اصول الرياضيات ، الجزء(١) ترجمه د . محمد مرسى احمد ، د. احمد فؤاد الاهوانى ، دار المعارف ،١٩٥٨، ص ٤٢

(٢) Carnap, The Old and The New Logic, p. 136.

(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع .

" اذا ضرب عدد فى آخر ،فالنتيجه تكون هى نفس نتيجه ضــرب العدد الثانى فى العدد الاول " .

ومن البديهى ان يكون المعنى اكثر وضوحا لو قلنا :

" بالنسبه لأى عددين س ، ص تكون س × ص = ص × س "

او قلنا بمزيد من الايجاز مستخدمين فى ذلك علامة الســـــور الكلى فى المنطق والرمز الخاص بالضرب وهو النقطه " . " :

" (س ، ص) س . ص = ص . س " (١)

ومن ميزه استخدام الرموز انها تؤدى الى الدقة فـــــى الاستدلالات لان استخدام الرموز يساعد على البحث فى العلاقات وعــدم الالتصاق بالاعتبارات الماديه وذلك فى حالة استخدام لغة الكلمه . كما ان استخدام الرموز يؤدى الى تحاشى الخلط والغموض وهو الامــر الذى يصعب تحاشيه مع لغه الكلمه .

وعلى ذلك يمكن القول ان اهم مزايا استخدام الرموز هى:(٢)

١) يساعد استخدام الرموز فى التمييز بين المعانى المختلفه. لاننا نتفق على استخدام رموز مختلفه لكل مفهوم متميــــز . ولا نستخدم رموزا لتمثل اكثر من مفهوم . وبذلك نتلاشـــــى الغموض الذى قد يتواجد فى اللغه المعتاده .

٢) باستخدام الرموز يكون فى مكنتنا التركيز على ما هو اساس فى سياق بعينه . فعندما نستبدل فى الرياضيات حرف واحـــد "ق" . بتعبير مركب مثل (أ + ب + ج + د) ، او عندمـــا

---

(١) المرجع السابق ،نفس الموضع .

(٢) Cohen, M. & Nagel, E., An Introduction to Logic, London, 1963, p. 12.

نستخدم الحروف " ع " ، " ح " ، " ط " بدلا من الكلمات " سقراط " " فان " ، "انسان " اى بدلا من الموضوع، المحمول ،والحد الاوسط فى القياس ،فاننا نوضح ان نتائج الاستدلال لا تعتمد على المعانى الخاصه بهذه التعبيرات .بل تعتمد على العلاقات المجرده التى تقوم بينها .

٣) كما ان الرموز تعرض بوضوح وبايجاز صور القضايا وهذا مما يعرف على الاخص فى الرياضيات . وكمثال على ذلك فإن الفارق فى الصوره بين المعادلتين الاتيتين :

(١) $٤\,س^{٢} = ٥\,س - ١$

(٢) $٤\,س^{٣} = ٥\,س^{٢} - ١$

وبين المعادلتين الاتيتين :

(١) $س + ص = ١$

(٢) $٤\,س = ٣\,ص$

يمكن ادراكه من اللمحه الاولى . ففى الثنائى الاول من المعادلات تكون المعادله الاولى تربيعيه بينما تكون الثانيه تكعيبيه . اما الثنائى الثانى فإنهما تمثلان معادلات خطيه .

واذا ما ذكرت المعادلات السابقة فى الفاظ اللغه لكان مستحيلا اجراء سلاسل طويله من الاستدلالات ، ذلك ان العبارات اللفظيه ستملاء العديد من الصفحات وتختفى فى طياتها العلاقات الاساسية بين العوامل العديده .

ثانيا: العلاقــــات :

لقد اوضحنا فيما سبق ان المنطق الصورى القديم لم يتناول سوى العلاقه الحمليه . بعبارة اخرى انه لم يأخذ فى الحسبان الا الشكل الحملى للجمله . فمثلا الجملــــه " سقـــراط انسان " نجد ان المحمول " انسان" يسند الى الموضوع " سقــراط" ولم يهتم المنطق الارسطى بالجمل ذات الصوره العلاقية مثــل " أ اكبر من ب " بل تناولها باعتبارها جمل ذات شكل حملــى . فطبقا للمنطق القديم تفسر الجمله " أ اكبر من ب " علــى ان " اكبر من ب " محمول يسند للموضوع " أ " . والواقع اننــا اذا اتبعنا هذا التفسير لا يمكن استنتاج " ب " بواسطه اى قاعده من قواعد الاستدلال . فلا يمكن مثلا ان نستنتج من الجمله " أ اكبر من ب " الجمله " ب اصغر من أ " . وبذلك تتضح اهمية المنطق الجديد الذى اهتم بالعلاقات ، ويمكن طبقا له التوصل الى هــذا الاستنتاج اذا ما اعتبرنا الجمله " أ اكبر من ب " جملـــة علاقه وليست جمله ذات شكل حملى .

ويسير هذا الاستدلال – فى المنطق الرياضى – بالطريقـــة الاتيه :

تعرف العلاقه "اصغر من " باعتبارها عكس العلاقـــه " اكبر من " . اذن يرتكز هذا الاستدلال على القضيه الكليــه التاليه :

(اذا تحققت علاقه بين س ، ص ، فان عكسها يتحقق بيــن ص ، س) .

وبذلك يمكن استنتاج " ب اصغر من أ " من " أ اكبرمن ب".

ومثال آخر لعباره لا يمكن برهنتها فى المنطق القديم: " حينما يكون هناك غالب يكون هناك شخص مغلوب " . وهى عباره تنتج - فى المنطق الجديد - من القضية المنطقية: اذا كان للعلاقه طرف بدايه ، فان لها كذلك طرف نهايه (١)

وفى الواقع انه لا يمكن اغفال عبارات العلاقه لانها عبارات ضروريه وبصفه خاصه للعلوم الرياضيه . ويمكن ان نأخذ كمثال التصور الهندسى لعلاقه المكان الثلاثيه " بين " (على خط مستقيم) . فالبديهيه الهندسيه القائله :

" اذا كانت أ تقع بين ب ، ج ، فان ب لا تقع بين ج ، أ " ويمكن التعبير عنها فى المنطق الجديد ولا يمكن التعبير عنها فى المنطق القديم . ذلك انه طبقا لوجهه نظر المحمول سيكون لدينا المحمولين :

" يقع بين ب ، ج " و " تقع بين ج ، أ " واللذان اذا ما تركا بدون تحليل فلن يمكن توضيح كيفيه التحول من المحمول الاول الى الثانى . بينما اذا استخرجنا " ب ، ج " من المحمول فإن العباره القائله " أ تقع بين ب ، ج " لن تكون خاصه بموضوع واحد فقط بل بثلاثه موضوعات . لذلك فانها عبارة علاقه ذات ثلاث مواضع . وتعد العلاقات " اكبر من " ، " بين " من هذا النوع الذى لا يمكن تغيير ترتيب حدوده حسب الرغبه . ويرتكز تحديد اى ترتيب فى اى مجال - بصفه اساسيه - على علاقات من هذا النوع (٢) وسوف نتناول ذلك تفصيلا عند تناولنا للعلاقات .

---

(١) Carnap, The Old and The New Logic, p. 137.

(٢) المرجع السابق ، ص ١٣٨

ثالثا: النسق الاستنباطى :

لعل من اهم مميزات المنطق الرياضى انه نسق استنباطـــى. وعادة ما يتكون النسق الاستنباطى بوضع قوائم بالحروف والعلامات المستخدمه فى النسق باعتبارها تمثل الثوابت والمتغيرات ، ثـــم توضع القواعد التى طبقا لها يتم تكوين الجمل من تلك العلامـــات وهى ما تسمى بقواعد التكوين . والى جانب ذلك توضع قائمـــــــه بالجمل الاوليه والتعريفات وايضا قائمه بقواعد الاستنباط التـــى يتم طبقا لها اشتقاق النظريات من الجمل الاوليه .

وعلينا التفرقه بين النسق الرمزى الشيئى وما بعد النسق . يشتمل النسق الشيئى على صياغات المنطق الرمزى ذاتهـــا ، اى الصياغات المتكونه من المتغيرات والروابط . بينما يتناول مـــا بعد النسق كيفيه تكوين النسق الشيئى . اى عندما نوضح الآن كيفيه تكوين النسق الاستنباطى نكون فى مجال ما بعد النسق او مجال مـــا بعد المنطق .

ويرتكز تكوين النسق الرمزى على ما يلى :

١)	قواعد التكوين	Rules of formation
٢)	البديهات	Axioms
٣)	التعريفات	Definitions
٤)	قواعد التحويل	Rules of transformation

١) قواعد التكوين :

تحدد قواعد التكوين الرموز التى تعتبر رموزا اوليـــه او اساسيه ، اى الرموز اللامعرفه فى النسق الشيئى ذاته والتى يتكـون منها الصيغ . وعادة ما تنقسم هذه الرموز الى فئتين فى الانســـاق الرمزيه وهما : الروابط الاوليه ، والمتغيرات الاوليه .

وتمثل الروابط عامل مشترك فى كل نسق من انساق المنطق الرمزى . وكل رابط من الروابط له معنى ثابت لا يتغير ، فهو دائما يعنى شيئا واحدا . ومن الامثله على الروابط : رابطه اللزوم المادى والتى عادة ما يرمز لها بالعلامه " ⊂ " ، ورابطه الفصل ويرمز لها بالعلامة " ∨ " ، والعطف يرمز له بالعلامه " . " بينما يشار للمتغيرات بالحروف الهجائيه فمثلا تستخدم الحروف " ق ، ل " كمتغيرات للقضايا . وبواسطه الروابط يمكن تكوين الصياغات من المتغيرات . وكما انه فى اللغه المعتاده ليس اى ارتباط من الكلمات يؤدى الى تكوين جمل ، كذلك فى الانساق الرمزيه ليس كل ارتباط من رموز يؤدى الى صياغة او جمله . فمثلا العباره " و الى لكن " ليست جمله وكذلك فإن [(ل ق) (=) ⊂ ∨] ليست صياغة فى الانساق الرمزيه[١] اى انها ليست صياغه جيده التكوين . ويلاحظ انه ليست كل صياغه جيده التكوين تكون بالضروره مبرهنه theorem فى النسق .

وتوضح قواعد التكوين الشروط التى تتكون – طبقا لها – الصياغات من الرموز الاوليه بحيث تكون صياغات جيده التكوين . وهذه القواعد هى :[٢]

أ : قواعد تشترط الروابط والمتغيرات للنسق .

ب : قواعد تذكر انواع الاشياء التى يمكن ابدالها مع المتغيرات .

جـ : قواعد تضع الشروط التى – طبقا لها – تكون الارتباطات المتكونه من الرموز ذات معنى . ويقال على ارتباط الرموز الذى له معنى انه صياغه جيدة التكوين .

---

(١) Hackstaff, L. H., Systems of Formal Logic, New York, 1969, p. 37.

(٢) المرجع السابق . ص ٤٢

٢) التعريفات :

يذهب راسل الى انه المقصود بالتعريف " ان يكون لرمز جديد او لمجموعة جديده من الرموز نفس ما تعنيه مجموعه رموز قد سبق وعرف معناها "(١)

وهناك مجموعه من الرموز الاوليه التى لا يصاغ لها تعريفات وهى ما تعرف بالرموز الاوليه او اللامعرفات . ويطلق على الرمز المراد تعريفه " المعرف " definiendum وعلى الرمز المستخدم فى التعريف " المعرف " definiens . ويحتوى المعرف اما على لا معرفات او على رموز قد تم تعريفها من قبل .

فالتعريفات توضح اى الصياغات تكون مكافئه لصياغات اخرى وكمثال على التعريفات نجد فى نسق راسل ووايتهد (فى برنسيبيا) التعريف التالى :

(ق ⊂ ل) = تع(٢) (~ ق ∨ ل)

ويعنى هذا التعريف ان أيا من التعبيرين يمكن ابداله بالاخر عند حدوثه فى برهان (٣) .

٣) الجمل الاوليه :

ان الجمل الاوليه هى الجمل التى يفترض صدقها بدون برهان

---

(١) Whitehead, A.N. & Russell, B., Principia Mathematica, Vol.1, 2nd. ed., Cambridge at the University Press, 1950, p. 11.

(٢) تع نعنى بها تعريف

(٣) Hackstaff, Systems of Formal Logic, p. 42.

بأي نحو كان [١] ، كما انها تمثل نقطه البدء التىمنها تبرهن مبرهنات النسق بمساعدة قواعد الاستدلال والتعريفات .

٤) <u>**قواعد التحويل او الاستدلال :**</u>

وهي قواعد خاصه بالاجراءات التى تتخذ ازاء التعبيرات المنطقيه بحيث يمكن اشتقاق عبارات غير مبرهنه من عبارات مبرهنه (او من فروض) .

وتشترك معظم الانساق فى الاخذ بقاعدتى الابدال ، والوضع بالوضع Modus Ponens [٢].

ويتعين علينا عند تكوين النسق الاستنباطى مراعاه عدة خصائص يجب ان يتسم بها النسق . ولعل من اهم هذه الخصائص مفهومى الاتساق والاكتمال ، اذ انهما من المفاهيم الهامه التى شغلت وما زالت تشغل الكثيرين من المناطقه الى يومنا هذا .

ولقد اهتم تارسكى بمفهومى الاتساق والكمال عند بحثه للنظريه الاستدلاليه . " ان نظريه استدلاليه معينه تكون متسقه اذا لم يكن من الممكن ان نبرهن على ايه قضيه فيها ونفندها فى الوقت ذاته . وتسمى النظريه (الاستدلاليه) بالنظريه الكامله — من جهه اخرى — اذا كانت كل قضيه تمت صياغتها بوساطه حدود تلك النظريه مما يمكن ان نبرهن عليها او ان نفندها فيها. ولا يستخدم الحدان " متسق " و " كامل " لوصف النظريه فقط ، بل كذلك لوصف نسق البديهيات الذى اقيمت على اساسه النظريه

---

(١) تارسكى ، مقدمه للمنطق و لمنهج البحث فى العلوم الاستدلاليه : ترجمه د . عزمى اسلام ، مراجعة د . فؤادزكريا الهيئة العامه المصريه للتاليف والنشر ، ١٩٧٠ ص ١٥٢

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

الاستدلاليـه (١)

تطور المنطق الرياضى :

ظهر المنطق الجديد الى حيز الوجود فى السنوات الاخيرة من القرن الماضى . ويقوم المنطق الرياضى على نظرية جديده وليس هو بخطوه نحو اصلاح المنطق القديم . ولذلك فاننا عندما نعرض لتطور المنطق الرياضى لم نعود لنبدأ بالمنطق الارسطى بل سنبدأ من حيث بدأ المنطق الرياضى ذاته . وترجع البدايه الحقيقية للمنطق الرياضى الى الدراسات التى قدمها جورج بول G. BOOLE عن جبر المنطق . ولقد قام كل من جيفونز وبيرس وشرويدر – بعد ذلك – بعده دراسات وابحاث لتطوير جبر بول . ثم ظهر بعد ذلك، فى نهاية القرن التاسع عشر ،اتجاه جديد على يد فريجه وقام بيانو بتطوير هذا الاتجاه . وبلغ المنطق الرياضى اقصى مراحل تطوره على يد كل من راسل ووايتهد لقيامهما بالعمل الاساس الفخم للمنطق الجديد "مبادىء الرياضيات" Principia Mathematica (١٩١٠-١٩١٣). وتعتمد كل اسهامات المناطقة على هذا العمل (٢). والواقع لا يمكن القول بأن المنطق الرياضى قد توقف على طور بعينه لأنه ما زال فى تطور مستمر يتمثل فى اعمال المناطقة التاليين لراسل .

وسوف نتناول بشىء من الايجاز مراحل تطور المنطق الرياضى من خلال اعمال المناطقة الذين اسهموا فى هذا التطور وذلك على النحو التالى :

أولا: جورج بول G. BOOLE (١٨١٥-١٨٦٤) :

يعد جورج بول المؤسس الحقيقى لجبر المنطق ، وعادة ما يؤرخ لبداية المنطق الرياضى مع كتابه " التحليل الرياضى للمنطق

---

(١) تارسكى ،مقدمه للمنطق ولمنهج البحث فى العلوم الاستدلاليه ، ص ١٧١

(٢) Carnap, The Old and The New Logic, P. I35.

Mathematical Analysis of Logic سنة ١٨٤٧. ولقد تناول بول المنطق فى هذا المؤلف باعتباره جبرا .

واصبح المنطق - لدى بول - علما صوريا عاما ،مستقلا عن اى تفسير لرموزه . أى ان المنطق اصبح علما عقليا اكثر من كونه علما شارحا فلا يهم فيه الموضوع الذى تتخذ ازاءه الاجراءات مثل الجمع والضرب والطرح بل كل ما يهم فيه هو صور الاجراءات والعلاقات التى بينها .

والواقع ان بول هو اول من نجح فى ان ينقل الى مجال المنطق ، على نطاق واسع ، التدوين الجبرى وعمليات الحساب الرياضيه . كما انه اول من اصطنع حسابا تحليليا كاملا دقيقا ، واول من طبق لغه رمزيه تصلح فعلا للاستخدام ومعروضه بطريقه منهجيه .(١)

ولقد كان لبول نظرياته الهامه فى حساب الفئات . وسوف نعرض لأهم المفاهيم والافكار التى قدمها بول فى هذا المجال وذلك على النحو الآتى :

١) <u>الفئه الشامله والفئه الفارغة :</u>

يلاحظ بداية ان بول اراد تطبيق الجبر على المنطق لذلك فهو يستخدم الحروف الابجديه مثل a, b, c (والتى سنستخدم كمقابل لها أ ، ب ، ج) كمتغيرات يشير بها الى الفئات ويستخدم علامات الجمع والطرح والقسمه والمساواه كثوابت .

---

(١) د. عزمى اسلام ، دراسات فى المنطق مع نصوص مختارة ، مطبوعات جامعة الكويت . ١٩٨٥ ، ص ١٣٨.

لكى نفهم المقصود بالفئه الشامله علينا ان نعرف مفهوم آخر وهو عالم المقال Universe of discourse ويقصد به " كل ما نتحدث عنه فى سياق معين " . فعالم المقال فى كتاب الرياضه هو كل الاعداد ، وعالم المقال للنوع الحيوانى هى جميع انواع الحيوانات . وعالم المقال مساويا للفئه الشامله، فالفئه الشامله هى فئه كل الافراد فى عالم المقال . وقد يكون عالم المقال عالما خاصا بمقال معين مثل الاعداد او الالوان . وقد يكون عالم مقال عاما يشمل جميع الفئات التى يمكن ان نتحدث عنها فيشمل فئه الحيوان وفئه الجماد وفئه النباتات وبذلك فإن : الفئه الشامله = فئة الحيوان + فئه الجماد + فئه النبات. ويرمز بول لعالم المقال او الفئه الشامله بالرمز " ١ " اى بالواحد الصحيح :(١)

اى ان : الفئـه الشاملـه = ١

اما الفئه الفارغه فهى الفئه التى لا اعضاء لها ، ويرمز لها بول بالرمز (O) اى بالصفر (٢) فاذا قلنا مثلا فئه " الدوائر المربعه " فاننا لا نجد لهذه الفئه اعضاء وبالتالى تكون فئه فارغه . فاذا ما رمزنا لفئه " الدوائر المربعه " بالرمز " ج " فاننا نعبر عنها رمزيا كما يلى :

ج =O

أى ج = صفر

---

(١) Boole, G., Studies in Logic and Probability, The Open Court Publishing Company, 1952, p. 60.

(٢) المرجع السابق ، ص ٦٥

٢) الضرب المنطقى :

يتكون عالم المقال - كما سبق وذكرنا - من فئات ، وهذه الفئات ليست منعزله كل عن الاخرى ، بل يمكن ان نجد اعضاء مشتركه فى اكثر من فئه . فمثلا اذا كانت هناك ثلاث فئات (فئه الرياضيين) " أ " ، (فئه الطلبه) " ب " ، و (فئه الناجحين) " ج " ، فمن الممكن ان نجد عضوا متصفا بكونه "أ"، " ب " ، " ج " ، اى يمكن ان يوجد الطالب الرياضى الناجح. وهذا ما يسميه بول بالانتقاء elective او الاختيار وهو ما تقوم عليه عملية الضرب المنطقى.(١)

وقدم بول ثلاث قوانين وجدها كافيه للضرب المنطقى :

القانون الاول :

ان نتيجة عملية الانتقاء مستقله عن تجميع الموضوع. فليس هناك فرقا اذا ما اخترنا من مجموعه اشياء الفئة ج ، او اذا ما قسمنا المجموعه نفسها الى جزئين واخترنا من كل جزء على حده الفئه ج ثم جمعناهما معا بعد ذلك . وهذا ما عبر عنه بول بالمعادله الاتيه: (٢)

ج (أ + ب) = (ج × أ) + (ج × ب)

القانون الثانى :

ان عمليه ترتيب الاختيار لا تؤثر فى الاختيار . فاذا ما اخترنا من فئة الحيوانات (فئة الاغنام) التى نرمز لها بالرمز " أ " ثم اخترنا من فئة الاغنام (فئة الاغنام ذوات القرون)

---

(١) المرجع السابق ، ص ٦٠
(٢) المرجع السابق ، ص ٦١

والتى نرمز لها بالرمز " أ x ب " ، او بدأنا بان اخترنا من فئه الحيوانات (فئه ذوات القرون) " ب " ثم اخترنا من بينها (فئة ذوات القرون الاغنام) " ب x أ " فالنتيجة واحده لاننا فى النهايه سنصل الى فئه (الاغنام ذوات القرون). ولقد عبر بول عن هذا القانون بالمعادله الاتيه :(١)

ب x أ = أ x ب

القانون الثالث :

اذا ما قمنا باختيار فئه بعينها مره واحده او قمنا بالاختيار اكثر من مره فاننا سنصل الى نفس النتيجه وان تكررت عملية الاختيار لاكثر من مره . ولقد عبر بول عن هذا القانون بالمعادلتين الاتيتين :

أ x أ = أ

أ^٢ = أ

ونلاحظ انه اذا كان القانونين الاول والثانى يشتركان فى خواصهما مع رموز الحساب والجبر الا ان القانون الثالث خاص بالمنطق ويختلف مع رموز الحساب والجبر .

٣) **الطرح المنطقى :**

يستخدم بول الطرح المنطقى ليعبر به عن الفئه السالبه . فعالم المقال الذى يرمز له بول بالواحد الصحيح يتكون من أ ولا أ . ويعبر بول عن الفئه لا أ كما يلى:(٢)

لا أ = ١ – أ

---

(١) المرجع السابق ، ص ٦٢
(٢) المرجع السابق ، ص ٦٤

٤) **الجمع المنطقى :**

واستخدم بول الصياغه الرمزيه التاليه :

أ + ب

للدلاله على فئه الافراد التى ينتمى عناصرها اما الى الفئه " أ " او الى الفئه " ب " ولكن لا تنتمى لكليهما معا[١] . فلقد استخدم بول العلامه (+) كعلامه للفصل الاستبعادى .

ثانيا: وليم ستانلى جيفونز W. S. Jevons (١٨٣٥-١٨٨٢):

كما رأينا فان جهد بول فى حساب الفئات يعتبر نقطة البدايه الحقيقيه فىالمنطق الرمزى . لكن نقطه البدايه تحمل فى طياتها دائما اخطاء او فجوات او الامرين معا ، ومن ثم جاء المناطقه المعاصرون له واللاحقون مصححين لبعض اخطائه او مطورين لنظرياته [٢] ولقد ادرك جيفونز ما فى نظريته بول من اخطاء وحاول اصلاحها او تطويرها .

لقد اعترض جيفونز على الدلاله التى قدمها بول لعلامه الجمع (+) فى حساب الفئات . فلقد اعتبر بول ان عامل اجراء الجمع لا يتم اجراؤه الا على الفئات التى ليس بينها اعضاء مشتركه . ولكن جيفونز رأى ان الفئه (أ + ج) هى فئه كل الاشياء التى هى عناصر اما فى " أ " او فى " ج " او فى كليهما معا[٣] وبذلك فإن :

---

(١) Nidditch, The Development of Mathematical Logic, p. 38

(٢) د. محمود زيدان ، المنطق الرمزى ، دار الجامعات المصرية ، ١٩٧٢ ، ص ٤٨ .

(٣) Nidditch, The Development of Mathematical Logic, p. 46

أ + أ = أ

تمثل قانونا صحيحا .

وتكون (أ ولا أ) مساويه للواحد الصحيح وهو ما يعبر عنه بالصياغه الرمزيه التاليه :

أ + ـ أ = ١

باعتبار ان الواحد الصحيح مساويا للكل . وذلك القانون على عكس قوانين الاعداد فى الرياضيات حيث تكون :

١ + ـ ١ = ٠

ورغم ان نظريه جيفونز للاستنباط كانت افضل من نظريه بول فى بعض النواحى الا انها بصفه عامه اقل دقه واكثر تعقيدا.(١)

ثالثا: بيرس Peirce (١٨٣٩-١٩١٤):

لقد انجز بيرس تطورا ضخما وقدم انسقه جديده فى جبر المنطق . فقام بيرس بمراجعه جبر بول جاعلا منه منطقا صالحا للقضايا والعلاقات . كما حاول اقامة رابطه تربط بين منطق الفئات ومنطق القضايا . وكان بيرس اول من كشف عن اهمية منطق العلاقات وذلك فى البحث الذى نشره عام ١٨٧٠ بعنوان منطق العلاقات Logic of Relations (٢) واهتم كذلك بتطبيق الاجراءات المنطقيه بالنسبه للعلاقات لتكوين علاقات جديده مثل حاصل الضرب النسبى للعلاقات (٣) .

ويمكن متابعة ما قدمه بيرس من انجازات من خلال ما استحدثه فى جبر الفئات وكذلك فى نظرية العلاقات . وسوف نتناول كل منهما ببعض من الايجاز كما يلى :

---

(١) المرجع السابق ، ص ٤٨

(٢) د. عزمى اسلام . دراسات فى المنطق ، ص ١٨٤

(٣) المرجع السابق . نفس الموضع .

١ – جبر الفئات :

لقد أوجد بيرس علاقات جديده بين الفئات الموجوده فى جبر بول . فلقد ادخل بيرس علاقة " عضو فى " والتى رمزوا لها حديثا بالعلامه " ⊃ " . فاذا قلنا :

أ ⊃ ب

فان ذلك معناه ان كل عضو من اعضاء الفئه أ هو عضو فى الفئه ب . وقد يصل الفكر – فى جبر بول – الى هذه العلاقه ، التى تعد من اهم العلاقات فى المنطق والرياضيات ، ولكن فقط بواسطه المعادله التاليه (١)

أ × (١ – ب) = صفر

والتى تعنى اننا اذا قمنا باختيار الفئه أ من الفئه " لا ب " لن نجد شيئا ذلك لأن الفئه أ متضمنه فى الفئه ب

ولذلك كان التعبير عن علاقه " عضو فى " بعلامة بسيطه من اعظم اسهامات بيرس فى كل من المنطق والرياضيات .

٢ – نظرية العلاقات :

لقد حاول بيرس مستفيدا من اعمال كل من بول ودى مورجان ان يقدم نظريه عامه عن العلاقه . فمثلا العلاقه " أ ب " القائمه ، بين الافراد يمكن ان يعبر عنها ببساطه بانها فئة كل المجموعات (س : ص) حيث تكون س هى الاب و ص هى الابن لـ س .

وبصفه عامه فإن اى علاقه يمكن ان يقال انها الفئه التى عناصرها هى كل المجموعات (س : ص) للاشياء س ، ص حيث يمكن القول ان س فى علاقه مع ص (٢)

---

(١) Nidditch, The Development of Mathematical Logic, p. 49.

(٢) المرجع السابق ، ص ٥١

ومن فائدة هذا العمل الذى قدمه بيرس انه وضع نهايـــــه للاعتقاد السائد بان العلاقه شئ ما غريب وخاص.[١]

وبهذا يكون ما احرزه بيرس بالنسبه للعلاقه مماثل لمـــا احرزه بول بالنسبه للموضوعات والمحمولات . فمثلما حوّل بـــول الصفات الى فئات الاشياء التى لها الصفات ، فان بيرس حـــول العلاقات الى فئات مجموعات الاشياء التى بينها علاقات . وترجـــع اهمية منطق العلاقات بالنسبه لمنطق الرياضيات ، الى وجود عـدد ضخم من العلاقات والتى لها دورها الهام فى الرياضيات . مثـــلا علاقات " اكبر من " و " اصغر من " و " الجذر التربيعى لـ " و " بين " كلها تمثل جزءا هاما لمادة الرياضيات .

رابعا: بيانو Peano (١٨٥٨-١٩٣٢) :

لقد كان بيانو اول من اطلق على المنطق الجديد اســـــم " المنطق الرياضى "Mathematical Logic" [٢]. ويعتبر راسل انه لم يظهر للمنطق الرمزى فائده للفلسفه او لفروع الرياضـــه الاخرى حتى جاء بيانو بمناهجه الحديثه فتطور به[٣] . ويمكـــن ان نتابع اهم اراء بيانو فى المنطق الرياضى وفلسفة الرياضيات بشئ من الايجاز كما يلى :

أولا: المنطق الرياضى :

يبنى بيانو المنطق الرياضى على عدد من الافكار الاوليـــه والتعاريف والبديهيات .

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع
(٢) المرجع السابق ، ص ٧٣
(٣) راسل ، اصول الرياضيات ، الجزء(١) ترجمه د . محمد مرسـى احمد ، د. احمد فؤاد الاهوانى ، دار المعارف ، ١٩٥٨ .

١ – **الافكار الاوليه :**

يقدم بيانو سبعة افكار اوليه ، وهى اوليه فى رأيه لانهـا لا تقبل التعريف اى انها اللامعرفات التى يبدأ منها المنطـق الرمزى وهذه الافكار هى:(١)

أ – الفئـه
ب – علاقه الفرد بالفئه الذى هو عضو فيها
ج – فكره الحـد
د – اللزوم الذى تحتوى فيه كلا القضيتين على المتغيرات ذاتها اى اللزوم الصورى
هـ – اثبات قضيتين معا
و – فكرة التعريف
ى – سلب القضيه

٢ – **التعاريف :**

ويبدأ بيانو – قبل تقديم القضايا الاصليه – ببعـض التعاريف وهى :(٢)

أ – اذا كانت أ فئه فان قولك " س ، ص الفان " معنـاه ان س هى أ ، ص هى أ ،

ب – اذا كان أ ، ب فئتين فقولك " كل أ هى ب " معنـاه " س هى أ يلزم عنها ان س هى ب " .

ج – تعريف حاصل الضرب المنطقى او الجزء المشترك بين فئتين . فاذا كان أ ، ب فئتين ، فان جزءهما المشترك يتكـون من فئه الحدود س مثل ان س هى أ ، س هى ب .

---

(١) المرجع السابق ، ص ٦٦
(٢) المرجع السابق ، ص ٦٧ ، ص ٦٨

٣ – **البديهيات :**

قدم بيانو خمسه بديهيات وهى:[1]

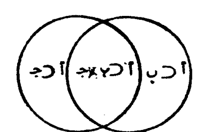
أ – " كل فئه تشتمل على نفسها " وهذا يساوى قولنا " كل قضيه يلزم عنها نفسها .

ب – حاصل ضرب فئتين هو نفسه فئه .

جـ – اذا كان أ ، ب فئتين فان حاصل ضربهما المنطقى أ x ب داخل فى أ ، و داخل فى ب .

د – وهذه البديهيه هى صورتان من القياس كلاهما قضيه اوليه . وتنص الاولى على انه اذا كان أ ، ب ، جـ فئات وكان أ داخلا فى ب ، وكان س هى أ ، فان س هى ب . وتنص الثانيه على انه اذا كان أ ، ب ، جـ فئات وكان أ داخلا فى ب ، ب داخلا فى جـ ، كان أ داخلا فى جـ .

هـ – وهذه البديهيه هى مبدأ للاستدلال يسميه بيانو بالتركيب . وينص هذا المبدأ على انه اذا كان أ داخلا فى ب ، وكذلك فى جـ ، فهو داخل فى الجزء المشترك فى كليهما . ويمكن ان يمثل له بالشكل التالى :



ثانيا : فلسفة الرياضيات :

لقد قام بيانو برد الرياضيات البحته الى نظرية الاعداد الطبيعيه ثم رد هذه النظريه الى اصغر مجموعه من المقدمات والحدود اللامعرفه .

---

(١) المرجع السابق ، ص ٦٩ ، ص ٧١

اوضح بيانو ان نظريه الاعداد الطبيعيه يمكن اشتقاقها من ثلاثه افكار اوليه وخمسه قضايا اوليه . ومما لا شك فيه ان عمليه تحليل الرياضيات قد يسرها اعمال بيانو فى هذا المجال . امـــا الثلاثه افكار اوليه التى قدمها بيانو فهى :(١)

١ – الصفر ويرمز له بـــ " 0 "
٢ – العـــدد
٣ – التالـــى

ويقصد بالتالى العدد التالى فى الترتيب الطبيعى : اى ان التالى للصفر هو ١ ، والتالى لـ ١ هو ٢ وهكذا.ويقصد بالعدد فئه الاعداد الطبيعيه .

اما القضايا الاوليه فهى :(٢)

١ – الصفر عدد
٢ – التالى لأى عدد هو عدد
٣ – ليس لعددين نفس التالى
٤ – الصفر ليس تاليا لأى عدد
٥ – اى خاصه من خواص الصفر وكذلك من خواص التالى لكل عـــدد هى خاصه لكل الاعداد .

خامسا: فريجــه F.G. Frege (١٨٤٨–١٩٢٥):

يعد فردريك جوتلوب فريجه من اكبر علماء الرياضه الالمــان فى اواخر القرن التاسع عشر واوئل القرن العشرين . شارك فـــى حركه " تحسيب التحليل " اى تحويل التحليل الى حساب ، وكذلـــك

---

(١) Ruessell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, London, 11th. impression, 1963, chap. 1, p. 5.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

ساهم فى " الاتجاه اللوجستيقى " اى رد التصورات الرياضيـــــــه الاساسيه الى تصورات منطقيه خالصه .[١]

ورغم ما لنظريات فريجه من اهمية عظمى فى تطور المنطـــق والرياضيات الا انه لم يتنبه احد من المناطقه والرياضيين الـــى اعماله الا بعد ان كشف راسل عن عبقريته واهميته .

ولقد وضع فريجه نظريه عن المعنى والمسمى من اجل حـــــل المتناقضات الناتجه عن علاقة الهوية . هل الهويه علاقه قائمـــه بين الاشياء . أم هى علاقه بين اسماء هذه الاشياء . وهل يختلف القول بأن " أ = أ " عن القول بأن " أ = ب " . من الواضح ان القـــول الاول يمثل جمله تحليليه بينما الجمله الثانيه لا تكون كذلك.[٢]

ومع ان نظريه فريجه عن المعنى والمسمى ذات اهميـــــــه بالغه من اجل منهج التحليل المنطقى الا اننا نجدها ولم تنـــــل الاهتمام الكافى الا من قبل راسل الذى قام بمناقشه تحليـــــــلات فريجه .[٣]

وسوف نتناول بشىء من الايجاز عرض فكرة فريجه عن النســـق الاستنباطى وذلك على النحو الاتى :

النسق الاستنباطى :

يتكون النسق الاستنباطى ـ كما سبق واوضحنا ـ من مجموعـــه

---

(١) د. محمود زيدان ، المنطق الرمزى ، دار الجامعات المصريه ، ١٩٧٢ . ص ١٢٩

(٢) Frege, On Sense and Nominatum, From : Readings in Philosophical Analysis, edt. by Feigl, H & Sellars W., New York, 1949, p. 85.

(٣) لقد تناولنا هذه النظريه تفصيلا فى بحثنا فى الدكتـــوراه " فلسفه التحليل عند رودلف كارناب " ١٩٨١، جامعة عين شمس ، غير منشور .

من المقدمات والنظريات والمبرهنات التى تستنبط من هذه المقدمات طبقا لقواعد الاستدلال الخاصه بالنسق . وتشتمل المقدمات فى النسق الاستنباطى الخاص بفريجه على افكار اوليه ، وتعريفات، ومبادىء .

١- الافكار الاوليه :

يقدم فريجه فكرتين اوليتين يقبلهما بلا تعريف ،ويستخدمهما فى تعريف افكار اخرى ضروريه للنسق ، والفكرتان هما.(١)

أ) السلب negation: فقولنا " القضيه أ سالبه " تعنى انه من الكذب ان نقول أ .

ب) التضمن implication : يشرح فريجه فكرة التضمن بان يضع الاحتمالات الاربعه لصدق أو كذب المقدم والتالى فى القضيه الشرطيه المتصله ويضعها فى الصيغ التاليه.(٢)

" أ موجبه ، ب موجبه" " أ سالبه ، ب سالبه "
" أ سالبه ، ب موجبه" " أ موجبه ، ب سالبه "

ويشرح هذه الصيغه بأن القضيه الشرطيه المتصله تصدق اذا صدق المقدم والتالى ، او كذب المقدم وصدق التالى ، او كذب المقدم والتالى ، لكنها تكذب اذا صدق المقدم وكذب التالى . يقرر فريجه علاقه التضمن بين قضيتين اذا صدقت القضيه الشرطيه فى الحالات الثلاث السابق ذكرها ، وينكر تلك العلاقه فى الحاله الرابعه ، ومن ثم فالاحتمال الرابع مرفوض ،والاحتمالات الثلاثه الباقيه مقبوله.(٣)

---

(١) د. محمود زيدان ، المنطق الرمزى ، ص ١٥٣

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع .

(٣) المرجع السابق ، ص ١٥٥

٢ – **التعريفات :**

قدم فريجه تعريفات للثوابت المنطقيه التى تربط بين قضيتين فينتج عنهما قضيه مركبه . ويعرف فريجه ثوابت الفصل وتدل عليها كلمة " أو " او كلمات " اما .. او " والعطف conjunction (وتدل عليها واو العطف) والمساواه .

يرى فريجه ان القضية الفصلية تصدق اذا صدق احد عنصريها او كلاهما معا . وتصدق القضيه العطفيه اذا صدق عنصراها معا وتكذب اذا كذب احد عنصريها على الاقل[1]. اما القضية التى تحتوى على مساواة او تكافؤ بين عنصريها فانه يمكن تبادل مواضع العنصرين دائما دون اخلال بالصدق.

٣ – **المبادىء :**

لقد وضع فريجه مجموعات عديده من المبادىء وسوف نذكر بعضا من هذه المبادىء كما يلى :[2]

أ – ق ⊂ (ل ⊂ ق)

ب – [(ق ⊂ (ل ⊂ م)] ⊂ [(ق ⊂ ل) ⊂ (ق ⊂ م)]

جـ – [(ق ⊂ (ل ⊂ م)] ⊂ [ل ⊂ (ق ⊂ م)]

د – (ق ⊂ ل) ⊂ (~ ل ⊂ ~ ق)

هـ – ~ ~ ق ⊂ ق

٤ – **قواعد الاستدلال :**

ولكى يتم استدلال نظريات او مبرهنات من تلك المقدمات الاوليه يلزم الاستعانه بقاعدتين للاستدلال هما :

---

(١) المرجع السابق ، ص ١٥٥

(٢) لم نقم بتقديم قراءات او شرح لهذه المبادىء لاننا سنقوم بذلك فى فصل " حساب القضايا " .

١) قاعدة التعويض
٢) قاعدة اثبات التالى .

سادسا: راسل Russell (١٨٧٢-١٩٧٠):

لقد قام كل من راسل ووايتهد بالعمل الاساسى الفخم للمنطق الجديد وذلك بتاليفهما " مبادئ الرياضيات" Principia Mathematica (١٩١٠-١٩١٣).

وتعتبر نظريتى راسل عن " الاوصاف " و " الانماط المنطقية" من اهم ما قدمه للمنطق الرياضى . ومما يجدر الاشاره اليه انه لم يسبقه احد فى القول بهما .

ولقد فرق راسل فى نظريته عن " الاوصاف " بين نوعين من الاوصاف : اوصاف محدده definite ، واخرى غامضة ambigious العباره الوصفيه المحدده هى عباره وصفيه مفرده مسبوقه بأداه التعريف وذلك مثل " الرجل ذو القناع الحديدى"[١]، اى ان العبارة الوصفيه المحدده تصدق على شخص بعينيه[٢].

اما العباره الوصفيه الغامضه فهى عباره فى صيغه نكره ومن امثلتها " انسان ما a man " ، " كلب ما a dog "[٣]. وقد نجد عبارات وصفيه من كلا النوعين لا تصدق على كائن ما ومن ثم فانها تمثل العبارات الوصفيه التى لا ما صدق لها[٤].

---

(١) Russell, On Denoting, From: Logic and Knowledge, edt. by Marsh, R., London, 5th. imp., 1977, p. 41.

(٢) Russell, The Philosophy of Logical Atomism, From: Logic and Knowledge, p. 243.

(٣) Russell, Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description. From: The Basic Writings of B. Russell, 1961, p. 220.

(٤) تناولنا هذه النظريه تفصيلا فى بحثنا فى الدكتوراه "فلسفة التحليل عند رودلف كارناب"

ومن المعروف ان راسل هو اول من وضع نظرية الانماط من اجل تحاشى المتناقضات التى ظهرت فى كل من الانساق المنطقيه والرياضيه .

وتنقسم المتناقضات بصفة اساسيه الى مجموعتين : المجموعه الاولى يمثل لها بالمتناقضه المشهوره عن فئة كل الفئات التى لا تكون اعضاء فى ذواتها[1] والمجموعه الثانيه واشهر الامثله عليها متناقضه الكذاب ، ومتناقضه التغاير المنطقى heterologish[2].

وتقع المجموعه الاولى من المتناقضات فى النسق المنطقى او الرياضى ذاته لاحترائها على حدود منطقيه ورياضيه فقط مثل " فئه " ، "عدد" ، اى ان هذا النوع من المتناقضات يكشف عن وجود خطأ ما فى المنطق ذاته او الرياضيات ذاتها .

اما متناقضات المجموعه الثانيه فهى ليست بالمتناقضات المنطقيه البحته ولا يمكن ذكرها فى حدود منطقيه فقط ، وذلك لاحتوائها على اشارات الى اللغه والفكر . فلا تنشأ هذه المتناقضات عن منطق خاطئ بل عن الافكار الخاطئه عن الفكر واللغه .

ولقد وضع راسل نظريه الانماط من اجل حل مثل هذه المتناقضات ولاقت هذه النظريه اهتماما كبيرا من جانب الكثير من المناطقه امثال رامزى[3] Ramsey وكوين[4] Quine اللذان قاما بتبسيط لها[5].

---

(١) Ramsey, The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays, London, 1937, p. 20.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٣) Ramsey, The Foundation of Mathematics p.p.32-49.

(٤) Quine, W., Mathematical Logic, Harvard, 1961, p. 163.

(٥) تناولنا نظرية الانماط تفصيلا فى بحثنا للدكتوراه " فلسفة التحليل عند رودلف كارناب " .

وسوف نعرض للنسق الاستنباطى لدى راسل بايجاز على النحو الاتى :

النسق الاستنباطى :

يطلق راسل على كل من الافكار اللامعرفة undefined ideas والقضايا اللامبرهنه undemonstrated propositions اسماء " الافكار الاولية" primitive ideas "والقضايا الاولية" primitive propositions وذلك اتباعا لبيانو[1]، تشتق النظريات والمبرهنات من القضايا الاوليه وفقا لقواعد الاستدلال وسوف نشير الى كل منها كما يلى :

١ـ **الافكار الاوليه والتعريفات :**

ولقد رأى راسل ان يبدأ النسق الاستنباطى بفكرتين لا معرفتين هما السلب والفصل[2]

وقدم راسل تعريفات لكل من العطف والتضمن والتكافوء وذلك فى ضوء السلب والفصل وذلك كما يلى :

١ـ العطف : (ق • ل) = ~ (~ ق ∨ ~ ل)

٢ـ التضمن : (ق ⊃ ل) = ~ (ق • ~ ل)

(ق ⊃ ل) = ~ (ق ∨ ل)

٣ـ التكافوء: (ق ≡ ل) = (ق ⊃ ل) • (ل ⊃ ق)

ولقد اقترح شيفر Sheffer على راسل امكان رد الفكرتين اللامعرفتين الى فكره واحده اوليه وهى فكرة عدم الاتفاق Incompatibility ورمز لها راسل بالعلامة " / " فمثلا :

(ق / ل) تعنى " ق غير متفقه مع ل "

---

(١) Russell, Principia Mathematica, p. 91

(٢) د. زيدان ، المنطق الرمزى ، ص ٢٠٥

ولقد رد راسل الثوابت الاربعة : السلب ، التضمن ، الفصل والعطف الى دالة عدم الاتفاق فى مقدمه الطبعه الثانيه لمؤلفه " Principia " وذلك كما يلى:(١)

١- (~ ق) = (ق / ل)
٢- (ق ⊃ ل) = (ق / ~ ل)
٣- (ق ∨ ل) = ~ (ق / ~ ل)
٤- (ق • ل) = ~ (ق / ل)

٢- **القضايا الاوليه :**

ولقد راعى رسل فى وضعه للقضايا الاوليه ان تكون فى اقل عدد ممكن وان تكون بسيطه وسهله بقدر الامكان.(٢)

قدم راسل المجموعه الآتيه من القضايا الاب داثيه :

١- مبدأ تحصيل الحاصل : Principle of Tautology
(ق ∨ ق) ⊃ ق

٢- مبدأ الاضافه : Principle of ddition
ق ⊃ (ل ∨ ق)

٣- مبدأ تبادل المواضع : Principle of l ermutation
(ق ∨ ل) ⊃ (ل ∨ ،)

٤- مبدأ الترابط : Associative Pr nciple
ق ∨ (ل ∨ م) ⊃ ل ∨ (ق ∨ م)

٥- مبدأ الجمع : Principle of Su mation
(ل ⊃ م) ⊃ (ق ∨ ل) ⊃ (ق ∨ م)

---

(١) Russell, Principia, Intro. to the 2nd.edt.,p. xxi.
(٢) المرجع السابق ، ص ٩١

٣ – **قواعد الاستدلال :**

يضع راسل قاعدتين لاستدلال القضايا من القضايا الاوليـــه وهمـــا :

١ – قاعدة التعويض .
٢ – قاعده اثبات التالى .

سابعا : **المنطق الرياضى بعد راسل :**

كما رأينا فإن المنطق الرياضى ان هو الا نظريه استنباطيه . وتقوم النظرية الاستنباطيه على وضع مجموعه من المقدمات والتى تشتق منها النظريات والمبرهنات طبقا لقواعد الاستدلال . والواقع ان عملية وضع المقدمات ان هى الا عمليه إختياريه ، اى عمليـــه تتم وفقا للنظريه التى يعتنقها عالم المنطق . ولذلك فـــإن النظريات الاستنباطيه تختلف من عالم منطقى الى آخر .

ولا يرجع الاختلاف بين نظريه واخرى الى الاختلاف فى مجموعـــه المقدمات فقط بل قد يرجع الاختلاف ايضا الى قيم الصدق . فهنـــاك من يقبل قيمتى الصدق والكذب وحدهما كحدين اولين ، وهناك مـــن يأخذ بثلاث قيم : الصدق و الكذب و الاحتمال . فـقد قدم لنـــا بوست Post منطقا ذا ن من القيم n-valued logic فلم يكتفى بقيمتى الصدق والكذب بل بأى عدد من القيم للقضايـا . وكذلك وضع لوكاتشڤيتش Lukasiewicz منطقا ذا ثـلاث قيم : الصدق ، الكذب ، غير يقينى uncertain.

غير ان هذا التعدد فى النظريات المنطقيه لم يفقد المنطق الرياضى وحدته طالما انها تتبع جميعها المنهج المتفق عليه وهـو المنهج الاستنباطى الذى يقوم عليه النسق الاستنباطى .

فالمنطق ـ بمعنى قانون الاستدلال ـ ان هو الا نخبه مختاره من العلاقات ، والقوانين الخاصه بها ، ويكون الاختيار طبقـــا لاهداف بعينها وهذا ما يطلق عليه بصفه عامه " الاستنباط " . ولا يوجد خاصه بعينها تميز مجموعه من العلاقات الكائنه بين القضايا عن غيرها . وبهذا المعنى يمكن القول انه لا يوجد مثل هذا الشىء الذى نسميه " منطق " ، بل يوجد فقط عدد ضخم لا محدود مـــــن العلاقات المختلفه بين القضايا ، ولكل علاقه من هذه العلاقـــات صفاتها الخاصه المحدده اى قوانينها الخاصه . واذا ما قام عالم المنطق بقبول او حذف علاقه من العلاقات فى " النسق " الخـــاص به فان ذلك ليس الا مسألة اختيار . فالانساق من صنع الانســـان ، فعندما ندخل علاقه بعينها فى نسق ما او نقوم بحذفها منه ، فإن هذا الادخال لا يخلق صدقا ، كما ان الحذف لا يؤدى الى خطـأ (١) فعملية الاختيار تعتمد بصفة اساسيه على الاهداف التى يرجو عالـم المنطق تحقيقها من النسق .

---

(١) Lewis, C. I & Langford, C. H., Symbolic Logic, London, 1932, p. 255.

الفصل الثانـــى
الحساب التحليلـى للقضايـــا

ان لم يكن للحساب التحليلى للقضايا السبق الزمنى فـــى تاريخ المنطق الرياضى الا أن له السبق المنطقى فى البحث والدراسة وحيث ان باقى نظريات المنطق الرياضى (حساب الدالات ـ حســـاب الفئات ـ العلاقات) ترتكز على المبادىء الخاصه بحساب القضايا ، فإنه من الاهميه بمكان البدء بالحساب التحليلى للقضايا .

وعندما نتحدث عن القضية (فى الحساب التحليلى للقضايــا) فان ما نقصده هو القضيه ككل ولا نبحث فى مكوناتها . وما يهمنـــا هو العلاقات المنطقية للقضيه بذاتها او بغيرها . وسوف نستخـــدم الحروف الهجائيه : ق ، ل ، م ، ن ... للدلاله على القضايا . وتعتبر هذه الحروف متغيرات حيث اننا عندما نتناول القضيه " ق " مثلا فاننا لا نقصد قضيه بعينها وانما نقصد بها اى قضيه ايـــا كانت . كما ان هذه الحروف نرمز بها الى القضايا الذريـــه او القضايا البسيطه والتى اذا ما ارتبطت فيما بينهـــــا بالروابط القضائيه تحولت الى قضايا مركبه .

الروابط القضائيه :

واحيانا ما يطلق على الروابط القضائية " عوامل اجـــراء قضائيه " Propositional Operations [(1)] واهم هذه الروابط المنطقية " ليس " ، " أو " ، " و " ، " اذا ... اذن ، "التكافؤ "

وتتسم الروابط المنطقية بانها لا يمكن ان تمثل صياغـــة بمفردها فى النسق المنطقى وتستخدم الروابط لتكوين صيغا مـــن

(١) Reichenbach, H., Elements of Symbolic Logic, New York, The Macmillan Comp., 6th. printing, 1960, p. 23.

صيغ اخرى [١]. فمثلا بواسطة رابطة الفصل " أو " يمكن تكوين الصياغة " ق او ل " من المتغيرات او الصياغات " ق " و " ل " .

كما ان الروابط المنطقية ان هى الا ثوابت لان معناها لا يتغير بتغير موضعها ، بل ثابته المعنى اينما وردت . ويمكن تناول الروابط المنطقيه بالشرح كما يلى :

١) رابطة النفى : negation

ويرمز لاجراء النفى بالعلامه " ~ " . وعادة ما توضع علامة النفى قبل القضية ، اى اذا ما كانت لدينا القضية " ق " واردنا نفيها فاننا نكتبها كما يلى :

~ ق

وتقرأ " ليس ق " او " من الخطأ القول بالقضية ق او ان " ق كاذبه " .

وتسمى القضيتان اللتان تكون احداهما نفيا للاخرى بالقضيتين المتناقضتين contradictory sentences وذلك لان صدق احداهما يستلزم دائما كذب القضية الاخرى ، فهما لا تصدقان معا ولا تكذبان معا [٢]

ويجب ملاحظه ان النفى لا يعنى الكذب ، فالقضية المنفيه قد تكون صادقه وقد تكون كاذبه . فإن كانت القضية " ق " كاذبه كانت القضيه " ~ ق " صادقه ، اما اذا كانت القضية " ق " صادقة فان القضية " ~ ق " تكون كاذبه .

كما يجب ملاحظه انه ليس فقط القضية " ~ ق " تكون نفيا للقضية " ق " ، بل ان " ق " هى ايضا نفى للقضية " ~ ق "

---

(١) Hackstaff, Systems of Formal Logic, p. 63.

(٢) د. عزمى اسلام ، اسس المنطق الرمزى ، الانجلو المصريه ، ١٩٧٠ ، ص ١٤٢

ذلك لاننا لو اردنا نفى "∼ ق" لقلنا :

" ∼ ∼ ق "

وبم ان نفى النفى اثبات اذن فإن :

∼ ∼ ق ≡ ق

ويلاحظ ان رابطة النفى تمثل اجراء احاديا لانها تكون مع قضيه واحده فقط عكس باقى الاجراءات الاخرى التى تكون بين قضيتين .

٢) رابطة الفصل : Disjunction

ويرمز لرابطة الفصل بالعلامه " V " وتقوم رابطه الفصل بين قضيتين ، فإن كان لدينا القضيتين " ق " ، " ل " مثلا واردنا اجراء الفصل لهما ستكون الصياغه الرمزيه كما يلى :

ق V ل

وتقرأ "القضيه ق او القضية ل "

ويسمى اجراء الفصل ايضا بحاصل الجمع المنطقى " كما تسمى القضايا التى يتكون منها الفصل المنطقى باسم عناصر الفصل(١) .

وقد يكون الفصل استبعاديا او غير استبعادى والفصل الاستبعادى يعنى ان قضية الفصل تكون صادقه فى حالة صدق احدى القضيتين فقط ، وتكذب اذا كانت القضيتان معا صادقتين او كانتا معا كاذبيتين . اى ان الفصل الاستبعادى يسمح بصدق احد عنصريه فقط .

---

(١) تارسكى ، مقدمه للمنطق ، ص ٥٦

أما الفصل غير الاستبعادى فإن الصدق فيه يعنى ان يكــون أحد العنصرين صادق مع امكان صدقهما معا . وعادة ما يؤ خــذ الفصل فى المنطق بالمعنى غير الاستبعادى . ومن ثم فإن قضيــه الفصل تكون صادقه فى حالة صدق احد عنصريها وكذلك فى حالــه صدق العنصرين معا .

وعلينا ملاحظه ان حكم الصدق ليس له علاقه بمضمون القضايــا بل يعتمد كلية على قيمه صدق العناصر فقط . وعلى ذلك فان كلمــة " أو " بالمعنى الذى تستخدم به فى المنطق المعاصر تختلف عــن المعنى الذى تستخدم به فى لغه الكلمه . فلو قلنا ان القضيــه " ق " هى رمز للقضية " ٢ × ٢ = ٤ " وهى قضية صادقه ،وان القضيه " ل " رمز للقضية " طه حسين مؤ لف الايام " وهى قضيه صادقــه كانت القضية :

" ٢ × ٢ = ٤ او طه حسين مؤ لف الايام " والتى يعبر عنهــا رمزيا كما يلــى :

ق $\vee$ ل

هى قضية صادقه فى المنطق الرياضى رغم انها تعتبــر قضية بلا معنى فى لغه الكلمه . فعادة ما تستخدم كلمه " أ و " فى لغة الكلمه بين جملتين مرتبطتين فى المضمون . وعادة مــا تستخدم فى حالة عدم علمنا بأى الجملتين هو الصادق .

ولكن كما سبق وذكرنا فان المناطقة فى المنطق الرياضــى يستبعدون تماما المضمون ولا يهتمون بما تعنيه " ق " أو " ل" او غيرها من القضايا بل يهتمون بقيم الصدق فقط والعلاقــات المنطقية القائمه بينها .

٣) رابطة العطف : Conjunction

يرمز لاجراء العطف بالعلامة " . " ويسمى ايضا بالضرب المنطقى logical product فاذا كان لدينا القضيتان "ق" ، "ل" فان الصياغة الرمزيه للقضيه العطفيه المركبه منهما تكون كما يلى :

ق . ل

وتقرأ " ق و ل " ، وتسمى بالقضيه العطفيه conjunctive proposition، وتسمى القضايا "ق" و "ل" بعناصر العطف members of conjunction.

وتصدق القضية العطفيه اذا ما صدق كل من عنصريها والعكس صحيح اى اذا ما صدق كل من العنصرين كانت القضيه العطفيه صادقه. وتكذب القضية العطفيه فى حالة كذب احد العناصر او كذبهما معا . وايضا اذا كانت القضيه العطفيه كاذبه دل ذلك على كذب احد العناصر او كذبهما معا .

ونلاحظ ان ما تعنيه اداة العطف " و " فى المنطق الرياضى هو نفس ما تعنيه فى لغه الكلمه ، فالقضيه المركبه من قضيتين مرتبطتين بواو العطف فى لغه الكلمه لا تكون صادقه الا اذا كانت القضايا المكونه لها كلها صادقه . فاذا قلنا :

الطالب مجتهد وناجح

فانها تكون صادقه فى حالة صدق القضيتين " الطالب مجتهد" و " الطالب ناجح " .

الا ان استخدام واو العطف فى المنطق لا يتعلق بمضمون العناصر المعطوفه بل بقيم صدقها فقط . فاذا قلنا ان " ٢ + ٣ = ٥ واكلت الايس كريم " فانه يعد استخدام صحيح

لأداة العطف " و " لاننا نستخدمها فى المنطق المعاصر بين قيـــــم صدق القضايا وليس بين مضمون القضايا . وفى هذه الناحيه يختلـف استخدام أداة العطف " و " فى المنطق عنه فى لغة الكلمه .

٤) رابطه اللزوم : Imiplication

ويرمز لرابطة اللزوم بالعلامه " ⊂ " ويكون اللزوم بيـن قضيتين ، وتكون الصياغة الرمزيه المعبره عن قضية اللزوم كمـــا يلـــى :

ق ⊂ ل

وتقرأ : اذا كانت القضية ق كانت القضية ل . وتمثـــل القضية " ق " المقدم Antecedent وتكون القضية " ل " هـــى التالى Consequent .

وتكون قضيه اللزوم صادقه فى ثلاث حالات :

١) صدق المقدم وصدق التالى
٢) كذب المقدم وصدق التالى
٣) كذب المقدم وكذب التالى

وتكذب قضيه اللزوم فى حالة اذا ما صدق المقدم وكـــذب التالـــى .

ونلاحظ ان علاقة اللزوم المستخدمه فى المنطق المعاصـــر تختلف عن تلك المستخدمه فى لغة الكلمه فنحن نلاحظ ان اللزوم كما فى باقى الاجراءات الاخرى يعتمد على حالة الصدق والكذب وليس لـه أية علاقه بمضمون القضايا . اما اللزوم فى لغه الكلمه فانـــه لا يستخدم الا اذا كان هناك ارتباط بين مضمون القضايا .

فعلاقة اللزوم تستخدم فى المنطق الرمزى بالمعنى المادى وليس بالمعنى الصورى الذى يتطلب وجود علاقة صوريه بين المقدم والتالى حتـــى

تكون قضية اللزوم قضيه صادقه و ذات معنى [١]

فمثلا لو كانت القضيه " ق " رمزا للقضيه " ٣ × ٣ = ٩ " وهى قضيه صادقه ، وكانت القضيه " ل " رمزا للقضية " الحديد يتمدد بالحراره " وهى قضيه صادقه ، لكانت قضيه اللزوم :

" اذا كانت ٣ × ٣ = ٩ اذن الحديد يتمدد بالحراره "

هى قضيه لزوم صادقه .

ومن الواضح ان هذا اللزوم يخالف المعتاد فى لغه الكلمه التى يتطلب اللزوم بها علاقه صوريه بين المقدم والتالى . فعادة ما يستخدم اللزوم فى لغه الكلمه اذا ما كانت هناك علاقه تربط بين مقدم وتالى قضيه اللزوم بحيث يبدو التالى وكأنه نتيجه ضروريه من المقدم كما فى قضيه اللزوم التاليه مثلا :

" اذا كان الحديد معدن اذن يتمدد الحديد بالحرارة" فمن الواضح فى قضيه اللزوم السابقه وجود علاقه بين عنصريها ، كما ان القضية الثانيه او التالى يعتبر نتيجه للمقدم .

كما علينا ملاحظة انه فى قضيه اللزوم المادى حتى وان كانت قضيه صادقه فإن التالى لا يكون نتيجه من المقدم . ذلك لان قضيه اللزوم :

ق ⊂ ل

تعنى :

~ (ق . ~ ل)

اى انها تعنى من الكذب ان تكون "ق" صادقه و "ل" كاذبه . وقضية اللزوم "ق ⊂ ل " وان كانت صادقه الا انها ليست بتحصيل

---

(١) المرجع السابق ، ص ٦٢

حاصل Tautology[1] . اى ان قضية اللزوم " ق ⊂ ل " ليست صادقه فى كل الاحوال حتى تكون " ل " نتيجه لازمه عن "ق" ولا يحدث ذلك الا اذا كانت قضيه اللزوم قضيه تحصيل حاصل . اى اذا قلنا بصدق القضيه " ق " وقلنا بصدق قضيه اللزوم " ق ⊂ ل " . ويعبر عن ذلك رمزيا كما يلى :

ق . ق ⊂ ل

ففى هذه الحاله يمكن استنتاج صدق "ل" من القضية السابقة كما يلى:[2]

ق . ق ⊂ ل : ⊂ : ل

اى عندما نؤكد ان "ق" صادقه و أن " ق ⊂ ل " صادقه لا بد ان تكون " ل " صادقه .

٥) رابطة التكافؤ :

يرمز لاجراء التكافؤ بالعلامه " ≡ " وهو يقوم بين قضيتين . ويعبر عن قضيه التكافؤ بالصياغه الرمزيه الآتيه :

ق ≡ ل

وتكون قضيه التكافؤ صادقه اذا تساوى الصدق فى عنصريها ، اى اذا كان كل من العنصرين صادقا او كان كلاهما كاذبا . وتكذب قضيه التكافؤ اذا كان احد العنصرين صادقا والآخر كاذب . فالتكافؤ هو تكافوء بين قيم الصدق ومن ثم فإن القضيتين المتكافئتين يمكن ان تلزم كل منهما عن الاخرى .

---

(١) Lewis, Symbolic Logic, p. 243.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع .

لذلك فانه يلزم عن قضيه التكافوء :

ق ≡ ل

ان

(ق ⊃ ل) . (ل ⊃ ق)

قوائم الصدق : Truth Tables

تسمى القضايا المركبه الناتجه من ارتباط القضايا الذريه معا ـ بواسطة الروابط القضائيه ـ بدالات الصدق Truth Functions . ذلك ان عوامل الاجراء القضائيه تنشىء علاقه بين قيمة صدق القضيه المركبه وقيم صدق القضايا الذريه . وبذلك يكون لدينا خمس دالات صدق وهى : النفى ، الفصل ، العطف ، اللزوم ، التكافوء .

وتختلف دالة النفى عن باقى الدالات فى كونها داله ذات حجه واحده ، بينما تمثل الدالات الاخرى دالات ذات حجتين . لكن تتفق جميع الدالات فى توقف قيم صدقها على قيم صدق القضايا التى تمثل حججا لهم(١) فبتقرير صدق او اكذب " ق " او " ل " او " م " .... الخ . يمكن اثبات صدق او كذب دالات النفى ، الفصل ، العطف ، اللزوم والتكافوء .

ولا تعنى دالة الصدق سوى الشروط التى طبقا لها تكون صادقه او كاذبه . فمثلا " لا ق " تكون داله لـ " ق " وتكون صادقه اذا كانت " ق " صادقه وتكون كاذبه اذا كانت " ق " صادقه .

ولكل قضيه اثنان من امكانات قيم الصدق truth-values وهما الصدق truth ونرمز له بالحرف " ص " والكذب falsity ونرمز له بالحرف " ك " . ويمكن صياغة قواعد صدق truth rules كل داله من دالات الصدق بواسطة ما يطلق عليه قوائم

(١) Russell, Introduction to Mathematical Philosophy, p. 147.

الصدق ,

والواقع ان معرفه طريقه قوائم الصدق امر له اهمية لدارسى المنطق ، اذ لا بد ان يعرف بعض الطرق التى يستطيع بها ان يتاكد من صحة تفكيره وصحة ما يقوم بعمله من استدلالات (١)

وسوف نقوم بتوضيح قائمه الصدق الخاصه بكل داله من الدالات وذلك كما يلى :

١- **دالة النفى :**

لقد سبق واوضحنا انه اذا كانت لدينا القضية " ق " وأردنا نفيها فانها تصبح " ~ ق " وهذه تسمى بدالة صدق لان صدقها او كذبها يتوقف على صدق او كذب القضيه " ق " .

فاذا كانت القضيه " ق " صادقه كانت " ~ ق " كاذبه والعكس صحيح اذا كانت القضيه " ق " كاذبه كانت القضيه " ~ ق " صادقه . ويمكن التعبير عن ذلك بقائمه الصدق التاليه :

(١) ق	(٢) ~ ق
ص	ك
ك	ص

قائمه رقم(١)

ويتضح لنا من القائمه رقم(١) ان قائمه الصدق الخاصه بدالة النفى تتكون من عمودين(١) ، (٢) . العمود(١) خاص

(١) د. محمد مهران ، مقدمه فى المنطق الرمزى ، دار الثقافه للنشر والتوزيع ، ١٩٨٧ ، ص ١٠٨

بالقضيه المكونه للداله وهى القضيه " ق " والعمود(٢) خـــاص بالداله نفسها وهى "~ ق " . وكتب اسفل العمود رقـــــم(١) احتمالات صدق وكذب القضية " ق " وهى لها احتمالان فقط طالمـــا انها عنصر واحد فقط ، ويقال عن هذه الاحتمالات انها تمثل صفـوف rows وبذلك يكون لدينا صفين . وكتب تحت العمـــود(٢) قيم صدق الداله " ~ ق " بناء على احتمالات صدق " ق ". وبذلك توضح القائمه رقم(١) شروط صدق الداله "~ ق"

٢- دالة الفصل :

عند تكوين قائمه صدق لداله الفصل " ق ∨ ل " نجدهـــــا داله تتكون من عنصرين " ق " ، " ل " . لذلك سنكتب كلا مـــــن العنصرين اولا ثم نكتب صيغه الداله ذاتها . ثم نكتب تحت كـــل عنصر قيم الصدق الممكنه بالنسبه له . ويمكن تحديد قيم صـــدق الداله بناء على قيم صدق العناصر . وبما ان الداله الفصليـــه تتكون من عنصرين سيكون لدينا اربعة احتمالات للصدق باربعـــة صفوف وذلك كما يلى :

(٣)	(٢)	(١)
ق ∨ ل	ل	ق
ص	ص	ص
ص	ك	ص
ص	ص	ك
ك	ك	ك

القائمه رقم(٢)

وبذلك توضح القائمه رقم(٢) شروط صدق الداله الفطيـــــه " ق ∨ ل " وهى كما يلـــى :

١) اذا صدقت "ق" ، "ل" كانت " ق$\vee$ل " صادقه .
٢) اذا صدقت " ق " وكذبت " ل " كانت " ق $\vee$ ل " صادقه .
٣) اذا كذبت " ق " وصدقت " ل " كانت " ق$\vee$ل " صادقه .
٣) اذا كذبت " ق " وكذبت " ل " كانت " ق$\vee$ل " كاذبه .

٣- <u>دالة العطـف :</u>

ودالة العطف هى الداله المعبر عنها بالصياغه الرمزيـــه "ق . ل " وهى داله ذات عنصرين لذلك يتّبع عند تكوين قائمـــة الصدق الخاصه بها ما سبق واتبعناه عند تكوين قائمه صدق الدالـه الفصليه .وتكون قائمه صدق الداله العطفيه كما يلى :

(١)	(٢)	(٣)
ق	ل	ق . ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ك

القائمه رقـــم(٣)

وبذلك تكون شروط صدق الداله العطفيه " ق . ل " هى :
١) اذا صدق كل من " ق " و " ل " صدقت " ق . ل "
٢) اذا كانت " ق " صادقه وكانت " ل " كاذبه كانت " ق . ل " كاذبـه .
٣) اذا كانت " ق " كاذبه وكانت (ل " صادقه كانت " ق . ل " كاذبـه .
٤) اذا كانت " ة " كاذبه وكانت " ل " كاذبه كانت " ق . ل " كاذبـه .

٤- دالة اللـزوم :

ودالة اللزوم هى الداله المعبر عنها بالصياغة " ق ⊂ ل" وهى داله ذات عنصرين وبذلك تكون قائمه الصدق الخاصه بها كمـا يلـى :

(١) ق	(٢) ل	(٣) ق ⊂ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ص

القائمه رقـــم (٤)

وبذلك تكون شروط صدق دالة اللزوم " ق ⊂ ل " هى :

١) اذا ما صدقت " ق " و " ل " كانت " ق ⊂ ل " صادقه .
٢) اذا ما صدقت " ق " وكذبت " ل " كانت " ق ⊂ ل " كاذبه.
٣) اذا ما كذبت " ق " وصدقت " ل " كانت " ق ⊂ ل " صادقه
٤) اذا ما كذبت " ق " وكذبت " ل " كانت " ق ⊂ ل " صادقه .

٥ - دالة التكافـو :

ويعبر عن دالة التكافو بالصياغة " ق ≡ ل " ودالــــه التكافو هى ايضا داله ذات عنصرين ومن ثم تكون قائمه الصــدق الخاصة بها كما يلى :

(١) ق	(٢) ل	(٣) ق ≡ ل
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ك
ك	ك	ص

القائمه رقـــم (٥)

وبذلك يتضح من القائمه رقم(٥) شروط صدق دالة التكافـــؤ " ق ≡ ل " وهي كما يلى

١) اذا صدقت كل من " ق " و " ل " كانت " ق ≡ ل " صادقة

٢) اذا صدقت " ق " وكذبت " ل " كانت " ق ≡ ل " كاذبه

٣) اذا كذبت " ق " وصدقت " ل " كانت " ق ≡ ل " كاذبه

٤) اذا كذبت " ق " وكذبت " ل " كانت " ق ≡ ل " صادقه .

ويمكن ان نقدم تلخيصا للقوائم السابقه ونضعها جميعهـــا فى قائمه واحده كما يلى :

(١) ق	(٢) ل	(٣) ~ ق	(٤) ق ∨ ل	(٥) ق . ل	(٦) ق ⊃ ل	(٧) ق ≡ ل
ص	ص	ك	ص	ص	ص	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ك	ك
ك	ص	ص	ص	ك	ص	ك
ك	ك	ص	ك	ك	ص	ص

القائمه رقـــم(٦)

قوائم القضايا المركبه من قضايا مركبه :

ان قوائم الصدق السابقه هى قوائم صدق لأبسط الدالات ذلـــك لأن القضايا بها ان هى الا قضايا مركبه من قضايا بسيطه . ولكـــن هناك قضايا مركبه من قضايا مركبه وبواسطه قوائم الصدق يمكـــن ان نحدد قيم صدقها ويمكن ان نوضح ذلك بالامثله الآتيه :

المثال(١):

يمكن بواسطه قائمه الصدق ان نحدد قيمه صدق قضية مركبـــه من دالة النفى وقضيه مركبه وذلك مثل القضية الاتيه :

$$\sim(ق \vee ل)$$

ومن اجل تكوين قائمه صدق خاصه بها نجد ان :

١) " ق$\vee$ل " هى العنصر الوحيد لدالة النفى.
٢) ان العنصر " ق$\vee$ل " يتكون هو نفسه من عنصرين " ق " ، " ل " فنضعهما فى عمودين مثلما فعلنا فى القوائم السابقه ثم نضع القضيه المركبه منهما وهى " ق $\vee$ ل" فى عمـــود ثالث .
٣) نضع الداله $\sim$ (ق$\vee$ل) فى العمود(٤).
٤) نضع احتمالات الصدق الخاصه بالعنصرين " ق " ، " ل " .
٥) نضع قيم صدق (ق$\vee$ل) بناء على احتمالات صدق "ق" ، "ل".
٦) ولقد علمنا من قائمه الصدق رقم(١) ان القضيه المنفيـــه لها قيم صدق عكس قيم صدق القضية الاصليه ومن ثم فإن قيـــم صدق الداله $\sim$ (ق$\vee$ل) تكون عكس قيم صدق (ق $\vee$ ل).

وتكون القائمه كما يلـــى :

(١) ق	(٢) ل	(٣) ق ∨ ل	(٤) ∼ (ق ∨ ل)
ص	ص	ص	ك
ص	ك	ص	ك
ك	ص	ص	ك
ك	ك	ك	ص

القائمه رقم (٧)

المثال (٢) :

وهو يتكون من قضيه مركبه من قضيتين مركبتين وهى:[١]

∼(ق ∨ ل) ≡ ∼ ق . ∼ ل

ونجد فى هذا المثال ثلاث قضايا مركبه هــى:

∼(ق ∨ ل)

∼ ق . ∼ ل

∼(ق ∨ ل) ≡ ∼ ق . ∼ ل

ومن اجل تحديد قيم صدق القضيه المركبه:

∼(ق ∨ ل) ≡ ∼ ق . ∼ ل

سنقوم بعمل قائمه الصدق رقم ٧ ، ومن اجل عمل هذه القائمه نقوم بالخطوات الاتيه :

١) تتكون القضيه المركبه (ق ∨ ل) من القضيتين "ق" و"ل" وبذلك ستكون قائمه يكون عدد صفوفها $٢^٢$ = ٤ صفوف لان كــل قضيه بمفردها لها امكانتان صدق وبما انهما قضيتان سيكــون

---

(١) هذا المثال مأخوذ من :
Carnap, An Introduction to Symbolic Logic, p.p. 11,12.

لهما ٤ صفوف ويوضح العمودان(١) ، (٢) تركيبات الصدق الممكنه لكل من " ق " و " ل " ٠

٢) يمثل العمود (٣) من القائمه رقم(٧) القضية (ق ∨ ل) وهى المكون الوحيد للقضيه المركبه ∼(ق ∨ ل) ونضع قيم صدق (ق ∨ ل) بناء على احتمالات صدق "ق" و "ل".

٣) يمثل العمود(٤) القضيه المركبه ∼(ق ∨ ل) والتى تكون القيم الخاصه بها عكس القيم الخاصه بالقضيه (ق∨ل) .

٤) اما القضية المركبه (∼ ق ٠ ∼ل) فإن مكوناتها هى "∼ ق" ، "∼ل " وبذلك نحتاج الى عمودان لهما وهما العمودان (٥) ، (٦) وستكون قيم صدقهما عكس قيم الصدق فى العمودان(١) ، (٢) ٠

٥) يمثل العمود(٧) القضية (∼ ق ٠∼ ل) وسنحصل على قيم صدقها من العمودين(٥) ، (٦) طبقا لشروط صدق القضية العطفيه التى سبق وعرفناها من القائمه رقم (٣).

٦) اما القضية المركبه ∼ (ق∨ل) ≡ ∼ ق ٠∼ل فان عنصريها هما "∼(ق ∨ ل)" ، "∼ ق٠ ∼ ل" ولقد عرفنا قيم الصدق الخاصه بهما فى العمودين(٤) ،(٧)٠ وبذلك فاننا سنحتاج فقط لعمود اخير لهذه القضيه وهو العمود (٨) وبقراءة العمودين (٤) ، (٧) معا صفا بصف نضع قيم صدق هذه القضيه طبقا لشروط صدق دالة التكافؤ التى سبق وعرفناها من القائمه رقم(٥) ٠

(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)
ق	ل	ق ∨ ل	∼ (ق∨ل)	∼ ق	∼ل	∼ ق٠ ∼ل	∼(ق∨ل) ≡ ∼ق٠ ∼ل
ص	ص	ص	ك	ك	ك	ك	ص
ص	ك	ص	ك	ك	ص	ك	ص
ك	ص	ص	ك	ص	ك	ك	ص
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص

القائمه رقم (٨)

استخدام قوائم الصدق للكشف عن انواع الدالات :

يمكننا باستخدام قوائم الصدق الكشف عن انواع دالات الصدق. فدالات الصدق قد تكون عرضيـــــه contingent او منـاقضـــه ذاتيـــــا self contradictory او معبره عن تحصيـــــل الحاصل tautology .

وتكون دالة الصدق عرضيه عندما نجد انها تصدق تحت بعـــض شروط الصدق وتكـذب تحت بعضها الآخر . ويقال ان هذه الدالات عرضية لأنها محتمله الصدق والكذب ،وليس هناك ضروره فى صدقها او كذبها. ومن الامثله على هذا النوع من الدالات ما يلـى :

~ ق

ق . ل

ق ∨ ل

ق ⊃ ل

ولقد سبق وقدمنا قوائم الصدق الخاصه بها والتى اظهـــرت صدقها فى بعض القيم وكذبها فى البعض الآخر ، ومن ثم فانها دالات عرضيـه .

وتكون دالة الصدق متناقضه عندما تكذب فى جميع قيم الصـدق. ومن الامثله على الداله المتناقضه القضية التاليه :

ق . ~ ق

ويتضح تناقضها من القائمه الخاصه بها وهى القائمه رقم(٩).

(١) ق	(٢) ~ ق	(٣) ق . ~ ق
ص	ك	ك
ك	ص	ك

القائمه رقم(٩)

اما اذا كانت الداله صادقه فى جميع قيم الصدق فانهـــــا تكون تحصيل حاصل . ومن ثم فانها تكون صادقه منطقيا ، ولذلـــك فانها تمثل قوانينا للمنطق ومن الامثلة عليها :

١- **قانون النفى المذدوج :** Law of double negation

ويعبر عنه بالصياغه الآتيه :

ق ≡ ~~ ق

ويمكن الكشف عن كونه تحصيل حاصل او صادق منطقيا بواسطــه قائمه الصدق رقم (١٠)

(١)	(٢)	(٣)	(٤)
ق	ق	ق	ق ≡ ~~ ق
ص	ك	ص	ص
ك	ص	ك	ص

القائمه رقـــم(١٠)

٢- **قانونا دى مورجـان:**[١] De Morgan's Laws

وهما قانونان يعبران عن العلاقه بين العطف ، والانفصــــــال والنفى .

أ: **القانون الاول :**

ويقوم هذا القانون على ان تأكيد نفى الانفصال " قVل" يكون مكافىء منطقيا لتاكيد عطف نفى كل من "ق" و "ل" وهو ما يعبر عنه بالصياغة الرمزيه الاتيه :

---

(١) Copi, I. m., Introduction to Logic, 3rd., edt. London, 1969, p. 241.

~ (ق ∨ ل) ≡ (~ ق · ~ ل)

ويمكن التأكد من الصدق المنطقى لهذا القانون بواسطة قوائم الصدق · وتمثل القائمه رقم(٨) قائمه صدق لهذا القانون ويتضح منها انه صادق فى جميع قيم الصدق ·

ب: <u>القانون الثانى :</u>

ويقوم هذا القانون على ان تأكيد نفى العطف " ق·ل" يكون مكافىء منطقيا لتأكيد انفصال نفى كل من "ق" و "ل" · ويعبر عنه بالصياغة الرمزيه الاتيه :

~ (ق· ل) ≡ (~ ق ∨ ~ ل)

ويمكن التأكد من صدقه المنطقى بواسطه القائمه رقم(١١) التى يتبين منها انه صادق فى جميع قيم الصدق ·

(١) ق	(٢) ل	(٣) ق · ل	(٤) ~(ق·ل)	(٥) ~ ق	(٦) ~ ل	(٧) ~ ق ∨ ~ ل	(٨) ~(ق·ل) ≡ (~ق ∨ ~ل)
ص	ص	ص	ك	ك	ك	ك	ص
ص	ك	ك	ص	ك	ص	ص	ص
ك	ص	ك	ص	ص	ك	ص	ص
ك	ك	ك	ص	ص	ص	ص	ص

القائمه رقم(١١)

<u>قائمه الصدق الجزئيه :</u>

ان استخدام الطرق السابقه لقوائم الصدق وان كانت تمثل طريقة سهله وآليه الا انها تحتاج فى تطبيقها الى وقت طويل وعدد كثير من الصفوف خا اذا كانت مركبه من اكثر من مكونين · فمثلا اذا كان لدينا القضيه المركبه الآتيه :

[ق ⊂ (~ل ≡ م)] : ⊂ : (ق · م ⊂ ~ل)

واردنا معرفه اذا ما كانت تمثل قضيه تحصيل حاصل ام لا ، فاننا اذا اتبعنا الطرق السابقه سنجد انها تحتوى على ثـــلاث مكونات اساسيه وهى "ق" ، "ل" ، "م" · ومن ثم اذا اتبعنـــا الطرق السابقه لقوائم الصدق سنتحاج الى قائمه ذات ثمانيـــة صفوف للثلاث مكونات لأن لكل مكون قيمتى صدق ومن ثم فان ٢[٣] = ٨ صفوف · ولكن كارناب يقترح قائمه صدق كل ما نحتاجه بها هو صف واحد فقط ويطلق عليها " قائمه الصدق الجزئيـــــــة " Partial-truth table [١] .

فإذا اردنا التحقق من القضية المركبه السابق ذكرها وهى :

[ق ⊂ (~ل ≡ م)] : ⊂ : (ق · م ⊂ ~ل)

فاننا سنقوم باجراء قائمه صدق جزئيه وهى القائمه رقـــم (١٢) و قبل ان نوضح الخطوات المتبعه فيها علينا ملاحظه اننـــا سنكتب القضيه التى نريد فحصها وسنضع رقم الخطوه تحت المتغيـــر او الثابت الذى نجريها عليـــه .

ل)	~	⊂	م	·	(ق	:⊂:	م)]	≡	ل	~(	⊂	[ق
٥ ص	٣ ك	٢ ك	٤ ص	٣ ص	٤ ص	١ ك	٦ ص	٨ ك	٦ ص	٧ ك	٢ ص ٩ ك	٦ ص

القائمه رقم (١٢)

(١) Carnap, An Introduction to Symbolic Logic, p.p., 137-140.

اما الخطوات فهى كما يلى:[١]

١) نكتب قيمة الكذب "ك" تحت الرابطه الرئيسيه" : $\supset$:".

٢) وطالما انه طبقا لشروط صدق دالة اللزوم انها تكون كاذبه فى حالة صدق المقدم وكذب التالى ، فاننا نضع تحت الرابطه الرئيسيه " $\supset$ " للسابق قيمة الصدق " ص " ونضع قيمة الكذب " ك " تحت الرابطه الرئيسيه " $\supset$ " للتالى .

٣) ويكون اللزوم صادقا فى ثلاث حالات وكاذبا فى حالة واحده . ومن ثم سنفحص ثلاث حالات اذا تناولنا المقدم وحالة واحده اذا تناولنا التالى ، لذلك سنبدأ بالتالى . ومثلما فى الخطوه الثانيه فان قيمة صدق عنصرى هذا التالى تكون بالضروره الصدق للمقدم والكذب للتالى . ومن ثم سنضع قيمه الصدق " ص " تحت اداة الربط " . " وقيادة الكذب " ك " تحت اداة النفى " $\sim$ " .

٤) وتكون دالة العطف صادقه اذا ما كان كل من عنصريها صادقاً ، اذن فاننا سنضع قيمة الصدق "ص" تحت كل من "ق" و "م" .

٥) اذا كانت "ك" هى قيمه النفى فان المكون المنفى يكون له القيمه "ص" ومن ثم نضع تحت " ل " القيمه " ص " .

٦) وبذلك نكون حددنا قيم كل جزء من اجزاء التالى لقضيه اللزوم الرئيسيه ويتبقى المقدم. وسنجد ان قيم كل من "ق" و "ل" و "م" فى التالى هى الصدق لذلك سنضع نفس القيمه وهى الصدق"ص" لكل من "ق" و "ل" و "م" فى المقدم

٧) وينتج عن ذلك اننا نضع القيمه "ك" تحت علامة النفى الموجوده فى المقدم لانه طالما ان "ل" صادقه فان نفيها يكون كاذبا .

٨) ونضع القيمه "ك" تحت الرابطه " $\equiv$ " لان عنصريها احدهما كاذب " $\sim$ ل " والاخر صادق " م " .

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع .

٩) ومن ثم فانه بناء على "ك" التى تحت " ≡ " و "ص" التى تحت "ق" الاولى يلزم ان نضع "ك" تحت الرابطه " ⊂ " الاولى لكننا سبق ووضعنا (فى الخطوه (٢)) القيمه "ص" تحت " ⊂ " لكن هذه القيمه الجديده تكون متنافره فنستنتج ان القيمه الاصليه التى وضعناها للجمله الرئيسيه (فى الخطوه (١)) وهى قيمه الكذب تكون مستحيله ومن ثم تكون الجمله الاصليه تحصيل حاصل .

قضايا تحصيل الحاصل :

ان قضايا تحصيل الحاصل ــ كما سبق وذكرنا ــ هى القضايا التى تكون صادقه تحت جميع شروط الصدق . وترجع اهمية قضايا تحصيل الحاصل انها تمثل القوانين فى المنطق ، حيث اننا لا نستعمل الملاحظات الفرديه ولا نحتاج الى الوقائع الخارجيه للتحقق من صحتها . فاذا ما تناولنا قضية تحصيل الحاصل الاتيه :

$$\sim(ق \vee ل) \equiv \sim ق \cdot \sim ل$$

نجد ان عامل الاجراء الاساس بها هو عامل اجراء التكافؤ " ≡ " وهو يتحقق لجميع قيم الصدق الممكنه لكل من"ق" و "ل" ومن ثم ينتج من سمة تحصيل الحاصل الخاصه بالقضية السابقه انه كلما كان الشطر الايمن صادقا نتيجه للملاحظات فان الشطر الايسر يكون صادقا كذلك والعكس صحيح . وكلما كان الشطر الايمن كاذبا نتيجه للملاحظات فسيكون الشطر الايسر كاذبا كذلك والعكس صحيح . ذلك ان صدق كل من شطرى قضيه التكافؤ السابقه يتكون بناء على الملاحظات الخارجيه اما قضيه التكافؤ نفسها فليس للملاحظات دخل بها . وبذلك لا يمكن ان توجد ملاحظات تجعل من علاقه التكافؤ ــ فى قضيه تحصيل الحاصل السابقه ــ علاقه كاذبه بل ان كل الملاحظات الممكنه تتفق مع قضيه تحصيل الحاصل السابقه .

ومن ثم فإن التكافؤ فى القضيه السابقه يمثل رابطه ضروريه والتحقق منه لا يعتمد على الملاحظات الامبيريقيه بل على تركيب القضيه . ومن ثم فانه أيا كانت قيم صدق مكونات قضية التكافؤ فان التكافؤ يتحقق .

ويلاحظ ان قضايا تحصيل الحاصل القائمه على التكافؤ يمكن ان تمثل تعريفات[١]. فمثلا اذا ما اعتبرنا الفصل والنفى عاملين اجرائيين اوليين فانه يمكن ان نعرف بواسطتهما باقى الاجراءات الاخرى كما يلى :[٢]

ق . ل = ~ (ق V ~ل) تع [٣]

ق⊂ل = ~ق V ~ل

ويمكن تكوين صياغات مماثله اذا ما اخترنا العطف والنفى كعوامل اجراء اوليه :

ولقد اوضح شيفر Sheffer امكانيه رد جميع عوامل الاجراء الى عامل واحد فقط وهو ما اطلق عليه عامل" عدم الاتفاق" incompatibility ويشار له بالرمز " / " وبذلك يمكن ان يكون لدينا التعريفات الاتية:[٤]

١) ~ق ≡ ق / ق تع

اى ان نفى القضيد يعنى عدم اتفاق القضيه مع نفسها .

٢) ق . ل = (ق/ ل) / (ق / ل) تع

اى ان عطف قضيتين يعنى سلب عدم الاتفاق .

---

(١) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p. 43

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٣) يلاحظ عندما نستخدم التكافؤ فى صورة تعريف فاننا نستخدم الثابت " = " بدلا من " ≡ " للدلالة على التعريف كما ان " تع " هى اختصار " لتعريف " .

(٤) المرجع السابق ، ص ٤٤

٣) ق $\vee$ ل = (ق/ق) / (ل/ل) تع
اى ان القضيه الفصليه تعنى سلب عدم اتفاق كل من المكونين مع نفسه .
وفيما يلى قائمه بأهم قضايا تحصيل الحاصل :

اهم قوانين حساب القضايا

أولا: قوانين خاصه بالقضيه الواحده :(١)

١) قانون الهوية Law of identity

أ : ق = ق
ب : ق $\vee$ ق $\equiv$ ق
جـ : ق . ق $\equiv$ ق

ويطلق على القانونين (ب) ،(جـ) قوانين تحصيل الحاصل(٢)

٢) قانون النفى المزدوج : Law of double negation
~~ ق $\equiv$ ق

٣) قانون التناقض : Law of contradiction
~ (ق . ~ ق)

٤) قانون الوسط المرفوع : Law of excluded middle
ق $\vee$ ~ ق

٥) رد المستحيل : Reductio ad absurdum
ق ⊃ ~ ق $\equiv$ ~ ق

---

(١) المرجع السابق ، ص ٣٨
(٢) Copi, Introduction to Logic, p. 255.

ثانيا: قوانين خاصة بالفصل المنطقى (١):

١) قانون التبادل : Law of commutation

ق ∨ ل ≡ ل ∨ ق

٢) قانون الترابط : Law of association

ق ∨ (ل ∨ م) ≡ (ق ∨ ل) م ≡ ل ∨ (ق ∨ م)

ثالثا: قوانين خاصة بالضرب المنطقى .(٢)

١) قانون التبادل :

ق . ل ≡ ل . ق

٢) قانون الترابط :

ق . (ل . م) ≡ (ق . ل) . م ≡ (ق . م) . ل

رابعا: قوانين التكافؤ .(٣)

١) (ق ≡ ل) ≡ (ق ⊃ ل) . (ل ⊃ ق)

٢) (ق ≡ ل) ≡ [(ق ≡ م) ≡ (ل ≡ م)]

٣) (ق ≡ ل) ≡ (~ ق ∨ ل) . (ق ∨ ~ ل)

٤) (ق ≡ ل) ≡ (ق . ل) ∨ (~ ق . ~ ل)

٥) (ق ≡ ل) ≡ (ل ≡ ق)

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٢) Carnap, An Introduction to Symbolic Logic, p. 31

(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع

خامسا: قوانين التناقل: [١] Transposition Laws

١) (ق ⊂ ل) ≡ (~ل ⊂ ~ق)

٢) (ق ≡ ل) ≡ (~ق ≡ ~ل)

سادسا: قوانين دى مورجان: [٢] De Morgan's Laws

١) ~(ق ∨ ل) ≡ (~ق · ~ل)

٢) ~(ق · ل) ≡ (~ق ∨ ~ل)

٣) (ق ∨ ل) ≡ ~(~ق · ~ل)

٤) (ق · ل) ≡ ~(~ق ∨ ~ل)

سابعا: قوانين الاستغراق: [٣] Distributive Laws

١) ق · (ل ∨ م) ≡ (ق · ل) ∨ (ق · م)

٢) ق ∨ (ل · م) ≡ (ق ∨ ل) · (ق ∨ م)

٣) (ق ⊂ ل · م) ≡ (ق ⊂ ل) · (ق ⊂ م)

٤) (ق ⊂ ل ∨ م) ≡ (ق ⊂ ل) ∨ (ق ⊂ م)

٥) ق ⊂ (ل ⊂ م) ≡ (ق ⊂ ل) ⊂ (ق ⊂ م)

٦) ق ⊂ (ل ≡ م) ≡ [(ق ⊂ ل) ≡ (ق ⊂ م)]

---

(١) المرجع السابق، نفس الموضع

(٢) المرجع السابق، نفس الموضع

(٣) المرجع السابق، ص ٢٨

ثامنا: قوانين الاستدلال:

١) ق ⊃ (ق ∨ ل)

٢) ل ⊃ (ق ∨ ل)

نلاحظ اننا فى القانونين السابقين نضيف قضيه اخرى عشوائيا لتكون عناصر الفصل .

٣) ل ⊃ (ق ⊃ ل)

٤) ~ ق ⊃ (ق ⊃ ل)

نلاحظ فى هذين القانونين ان الصياغة الشرطيه متضمنه منطقيا فى صدق تاليهـا ومتضمنه ايضا فى نفى مقدمها . اى ان — الصياغه الشرطيه تكون صادقه اذا كان تاليها صادقا وايضـا اذا كان مقدمها كاذبا.[1]

٥) ق . ل : ⊃ : ق

٦) ق . ل : ⊃ : ل

ويتضح من القانونين(٥) ، (٦) ان قضيه العطف تستلـــزم منطقيا كل من عنصريها.[2]

٧) ق . ~ ق : ⊃ : ل

يوضح هذا القانون ان العطف من القضيه ونقيضها يستلـــزم منطقيا اى قضية ايا كانت.[3]

٨) (ق ∨ ل) . ~ ق : ⊃ : ل

---

(١) المرجع السابق ،نفس الموضع

(٢) المرجع السابق ،نفس الموضع

(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع .

٩) (ق ∨ ل) ٠ ∼ ل : ⊃ : ق

يوضح القانونان (٨) ، (٩) ان القضية العطفيه المركبه من قضية فصل ونفى احد عنصريها تستلزم منطقيا العنصر الاخر [(١)]

١٠) (ق ⊃ ل) ٠ ق : ⊃ : ل

يوضح هذا القانون نمط هام للاستدلال وهو انه من القضيه الشرطيه ومقدمها نستنج التالى ٠ ويسمى هذا القانون بقاعدة الاثبات بالاثبات modus ponens ،

١١) (ق ⊃ ل) ٠ ∼ ل : ⊃ : ∼ ق

يوضح هذا القانون انه من القضيه الشرطيه ونفى تاليها نستنتج نفى المقدم ٠ ويسمى هذا القانون بقاعده الرفع بالرفع modus tollens ،

١٢) (ق ≡ ل) : ⊃ : (ق ⊃ ل)

١٣) (ق ≡ ل) : ⊃ : (ل ⊃ ق)

يتضح من القانونين(١٢) ، (١٣) ان قضيه التكافؤ تستلزم منطقيا قضية اللزوم التى تتكون من عنصريها[(٢)]

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

الاستنباط فى حساب القضايا :

الاستنباط اما ان يكون اشتقاقا derivation او برهانـــــا proof . والاشتقاق هو استنباط من مقدمات بعينها ، اى انه متسلسله من الجمل تكون كل جمله فيها اما واحده من المقدمات او جمله اوليه ، او جملة تعريف او مشتقه مباشره من جملـــــــه تسبقها فى المتسلسله [١].

اما البرهان فهو الاستنباط بدون مقدمات ، اى انه متسلسله من الجمل تكون كل جمله فيها اما جمله اوليه او جمله تعريـــف ، او مشتقه مباشره من جمله تسبقها فى المتسلسله [٢].

ومن ثم فإن البرهان يماثل الاشتقاق مع فارق واحد وهـــو ان البرهان لا يبدأ من فروض او مقدمات . كما انه من الممكـــن تأكيد النتيجه الاخيره للبرهان باعتبارها مبرهنـــه theorem فى حد ذاتها وبدون جعلها مشروطه بالعبارات البديهيه التـــى نتجت منها . لكن الامر يختلف فى حالة الاشتقاق حيث ان النتيجـــه لا يمكن اعتبارها مبرهنه بصفه عامه الا اذا كانت مرتبطه بالفـــرض الذى اشتقت منه باعتباره شرطا لها [٣].

وهناك قواعد عمليه توجه عملية الاستنباط وهى ما يطلـــق عليها قواعد الاستنباط . ويلاحظ ان هذه القواعد عمليه وليســـت صوريه حيث انها قواعد ارشاديه لاجراء الحساب المنطقى وليســـت من قوانين هذا الحساب . وهذه القواعد هى :

---

(١) Carnap, The Logical Syntax of Language, New York, The Humanities Press Inc., 1957, p.29.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٣) Hackstaff, Systems of Formal Logic, p. 35.

١) قاعدة التعويض : Rule of Substitution

تتعلق هذه القاعده بامكانية ابدال المتغيرات الحره فـــى قضايا تحصيل الحاصل بمتغيرات اخرى . فهى قاعده ارشاديـــــه directive لادخال صيغا جديدة[١] فيمكن ان نضع المتغيرات القضائية والتعبيرات القضائية المركبه بدلا من المتغيـــرات الحره [٢]. ويشترط ان يحدث هذا التعويض فى جميع المواضع التى يحدث بها الرمز الاصلى . فمثلا اذا كان لدينا الصياغه الاتيه :

ق ∨ (ل·م) ≡ (ق ∨ ل) · (ق ∨ م)

يمكن ان نضع "ك" بدلا من "ق" فى جميع مواضع حدوث " ق " ونشتق الصياغه التاليه :

ك ∨ (ل · م) ≡ (ك ∨ ل) · (ك ∨ م)

ونلاحظ اننا قمنا بالتعويض فى شطرى المعادله لأنه من الخطأ التعويض فى موضع وترك بقية المواضع .

كما يمكن ايضا ان نضع تعبيرا قضائيا بدلا من متغير فمثلا اذا كان لدينا الصياغه التاليه :

ق ⊃ ل ≡ ~ق ∨ ل

يمكن ان نضع التعبير القضائى (ك ∨ م · هـ) بدلا من المتغير " ق " ونشتق الصياغه التاليه :

(ك ∨ م · هـ) ⊃ ل ≡ ~(ك ∨ م · هـ) ∨ ل

---

(١) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p. 58.

(٢) المرجع السابق ، ص ٥٧

٢) قاعدة الابدال : Rule of Replacement

اذا كانت قاعدة التعويض تطبق فقط على المتغيرات الحره ، فان قاعدة الابدال تسمح بادخال تعبيرات جديده بدلا من التعبيرات المركبه . وترتكز هذه القاعده على ان التعبير الجديد يكون مكافئا للتعبير الاصلى[١] . اى انها خاصه باستبدال المتكافئات . وتتميز قاعده الابدال عن قاعدة التعويض فى كونها ليست مقيده بأن يكون الابدال فى جميع المواضع التى يحدث بها التعبير الاصلى[٢]. فإذا كان لدينا الصياغه التاليه :

ق ⊃ (∼ ق ∨ ل)

فانه يمكن عن طريق قاعدة الابدال والتعريف الآتى :

ق ⊃ ل ≡ ∼ ق ∨ ل

ان نشتق الصياغه التاليه :

ق ⊃ (ق ⊃ ل)

اى اننا وضعنا (ق ⊃ ل) بدلا من (∼ ق ∨ ل) لانهما متكافئتان .

ويقدم كوبى Copi[٣] قائمه بعشرة قوانين منطقيه خاصه بالمتكافئات ويعتبرها من أهم القوانين المساعده فى الاستدلال . وطبقا لقاعدة الابدال فإن أيا من التعبيرات المتكافئه منطقيا يمكن ان يحل كل منها مكان الآخر . ولقد ذكر كوبى المتكافئات التاليه :

١- قانونا دى مورجان :

∼(ق . ل) ≡ (∼ق ∨ ∼ل)

∼(ق ∨ ل) ≡ (∼ق . ∼ل)

---

(١) المرجع السابق ، ص ٥٩

(٢) المرجع السابق ، ونفس الموضع

(٣) Copi, Introduction to Logic, p. 255

٢ – **قانونا التبادل :**

(ق ∨ ل) ≡ (ل ∨ ق)

(ق · ل) ≡ (ل · ق)

٣ – **قانونا الترابط :**

[ق ∨ (ل ∨ م)] ≡ [(ق ∨ ل) ∨ م]

[ق · (ل · م)] ≡ [(ق · ل) · م]

٤ – **قانونا الاستغراق :**

[ق · (ل ∨ م)] ≡ [(ق · ل) ∨ (ق · م)]

[ق ∨ (ل · م)] ≡ [(ق ∨ ل) · (ق ∨ م)]

٥ – **قانون النفي المزدوج :**

ق ≡ ∼ ∼ ق

٦ – **قانون التناقل :**

(ق ⊃ ل) ≡ (∼ ق ⊃ ∼ ل)

٧ – **اللزوم المادي :**

(ق ⊃ ل) ≡ (∼ ق ∨ ل)

٨ – **التكافؤ المادي :**

(ق ≡ ل) ≡ [(ق ⊃ ل) · (ل ⊃ ق)]

(ق ≡ ل) ≡ [(ق · ل) ∨ (∼ ق · ∼ ل)]

٩ - **التصديـــــر :**

[(ق · ل) ⊂ م] ≡ [ق ⊂ (ل ⊂ م)]

١٠ - **تحصيل الحاصل :**

ق ≡ (ق ∨ ق)

ق ≡ (ق · ق)

٣) قاعدة الاستدلال : Rule of Inference

وتعد قاعدة الاستدلال من اهم قواعد الاستنباط بل انهـــــا القاعده الاساسيه للاستنباط . وتقوم هذه القاعده على انـــــه اذا كانت قضية اللزوم (ق ⊂ ل) صادقه وكانت " ق " صادقه فانـــــه يمكن تأكيد " ل "[1] . ويمكن ان يعبر عن هذه القاعده بالصياغه الرمزيه الآتيـــــه :

ق ⊂ ل	(١)
ق	(٢)
———————	
ق	(٣)

ويمثل الخطان الاوليان (١) ، (٢) المقدمات premises ويمثل الخط الثالث (٣) النتيجه conclusion.

وتوضح هذه القاعدة الفرق بين اللزوم Implication والاستنباط . فاللزوم ان هو الا جمله ويستخدم من اجل الاستنبـــاط[2]. ولا يمكن ان يحل اللزوم محل الاستنباط لان الاستنباط اجراء وليـــس جمله [3].

---

(١) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p.64.

(٢) المرجع السابق ، ص ٦٥

(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع

وهناك قاعده اضافيه لقاعدة الاستدلال السابقة وهى قاعـدة الاستدلال المتكافئ، equivelent inference • وتقـوم هذه القاعدة على انه اذا كانت قضية التكافؤ " ق ≡ ل" صادقـه وكانت " ق " صادقه فانه يمكن تاكيد "ل "(١) ويعبر عنه رمزيـا كما يلى :

ق ≡ ل
ق
―――――
ق

ويذكر كوبى ثمانية قواعد اضافيه للاستدلال الى جانب القاعدة السابقة وهى:(٢)

١ – **قاعده الرفع بالرفع :**

ق ⊂ ل
~ل
∴ ~ ق

٢ – **القياس الشرطى :**

ق ⊂ ل
ل ⊂ م
∴ ق ⊂ م

---

(١) المرجع السابق ، ص ٧٣

(٢) Copi, Introduction to Symbolic Logic, pp. 249,250

٣ – القياس الفصلى :

ق ∨ ل
~ ق
∴ ل

٤ – الاحراج المركب :

(ق ⊃ ل) · (ل ⊃ م)
ق ∨ ك
∴ ل ∨ م

٥ – الاستغراق :

ق ⊃ ل
∴ ق ⊃ (ق · ل)

٦ – التبسيط :

ق · ل
∴ ق

٧ – العطف :

ق
ل
∴ ق · ل

٨ – الاضافه او الجمع :

ق
∴ ق ∨ ل

الاشتقـــاق :

الاشتقاق ـ كما سبق وذكرنا ـ هو استدلال من مقدمات بعينها، فهو تتابع من قضايا تبدأ من المقدمات وتستمر خلال قضايا اخرى . بحيث تكون كل خطوه هى قضيه متضمنه منطقيا فى القضيه السابقـــه عليها (١). ولقد اطلق كل من كارناب(٢) ورايشنباخ(٣) مصطلـــــح " اشتقاق " على الاستنباط الذى يبدأ من مقدمات .

ولكى نوضح عملية الاشتقاق نقدم المثال التالى :

نفترض اننا نعرف ان " ق . ل ⊂ م " قضيه صادقه وان "ق" صادقه و " م " كاذبه . فما هى قيمه صدق " ل " ؟

يلاحظ انه يمكن معرفه قيمه صدق " ل " بواسطه قوائم الصدق الا أننا سوف نوضح كيفيه معرفه قيمه صدقها بواسطه الاستنبـــاط او الاشتقاق . وعند اجرائنا لعملية الاشتقاق سنقوم بوضع ارقـــــام للمقدمات والخطوات التاليه لها على اليمين وسنضع كلمه " مقدمه " الى يسار المقدمات حتى نوضح المقدمات عن بقية الخطوات . ثم على جهة اليسار سنضع ارقام المقدمات التى تشتق منها القضايا وكذلـك اسماء القوانين او القواعد التى يتم طبقا لها الاستنبط ، وذلـــك كما يلى :

(١)	ق . ل ⊂ م	(١)	مقدمه
(٢)	ق	(٢)	مقدمه
(٣)	~ م	(٣)	مقدمه
(٤)	~ (ق.ل)		من(١) ،(٣) وقاعده الرفع بالرفع
(٥)	~ ل		من(٢) ،(٤)

(١) Carnap, An Introduction to Symbolic Logic, p.33.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٣) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p.76

الشـــرح :

بما ان المقدمه الأولى تقرر صدق الصياغه " ق • ل ⊂ م ". وبما ان المقدمه الثالثه تقرر كذب "م". وبما ان"م" كاذبه فـأن " (ق • ل) " تكون كاذبه لأنه اذا كذب التالى كذب المقـــدم بناء على قاعدة الرفع بالرفع • وبما ان الصياغة " (ق • ل) " كاذبه و "ق" صادقه طبقا للمقدمه (٢) فان"ل" تكون كاذبه لأن كذب الصياغة " (ق•ل)" يعنى انه اما ان يكون كل من العنصرين كاذب او احدهما كاذب وبما ان "ق" صادقه اذن بالضروره تكون "ل" كاذبـــه وهى النتيجه التى انتهينا اليها اى ان حكم صدق"ل" هو الكذب •

البرهـــان :

يستخدم البرهان لاثبات صحه validity المبرهنات • فمثلا اذا كان لدينا المبرهنه التاليه :

(ق∨ل) • (ق⊂م) • (ل⊂م) •∼م : ⊂ : ن

واردنا التأكد من صحتها فاننا نقوم بالخطوات التاليه :

(١)	ق∨ل	مقدمه
(٢)	ق⊂م	مقدمه
(٣)	ل⊂ن	مقدمه
(٤)	∼ م	مقدمه
(٥)	∴ ن	نتيجـه
		البرهـان
(٦)	∼ ق	من(٢) ،(٤) طبقا لقاعدة الرفـع بالرفع •
(٧)	ل	من(١) ،(٦) طبقا للقياس الفصلى
(٨)	ن (النتيجه)	من(٣) ،(٧) طبقا لقاعدة الوضع بالوضع

الشـــــرح :

استنتجنا الخطوه (٦) من المقدمتين (٢) ، (٤) وقاعدة الرفــع بالرفع ، ثم استنتجنا الخطوه (٧) من (١) ، (٦) طبقا للـقيـــــاس الفصلى . واخيرا ادت بنا المقدمه (٣) والخطوه (٧) طبقا لقاعـــدة الوضع بالوضع الى الخطوه (٨) وهى تمثل النتيجـــه . اذن فان المبرهنه تكون صحيحه .

مثال آخــــر :

اذا كان لدينا المبرهنه التاليه:

(ق ⊂ ل) ، (ل ⊂ ن) ، (ق ∨ م) ، ~ ن : ⊂ : م

واردنا التاكد من صحتها فاننا نقوم بالخطوات الاتيه :

(١)	ق ⊂ ل	مقدمه
(٢)	ل ⊂ ن	مقدمه
(٣)	ق ∨ م	مقدمه
(٤)	~ ن	مقدمه
(٥)	∴ م	نتيجـه
		البرهـان
(٦)	ق ⊂ ن	من (١) ، (٢) طبقا للقياس الفرضى
(٧)	~ ق	من (٦) ، (٤) طبقا لقاعدة الرفع بالرفع
(٨)	م	من (٣) ، (٧) طبقا للقياس الفصلى.

الشـــرح :

من المقدمتين (١) ، (٢) وبواسطة القياس الفرضى توصلنا الى الخطوه (٦) . وبواسطة الخطوه (٦) والمقدمه (٤) وتطبيق قاعدة الرفـــع بالرفع توصلنا الى الخطوه (٧) . ومن المقدمه (٣) ، والخطــــوه (٧) وتطبيق القياس الفصلى توصلنا الى النتيجه "م".

البرهان على عدم الصحه :

بالطبع لا يوجد برهان صورى للصحه بالنسبه للمبرهنه غير الصحيحه . كما انه اذا لم نتمكن من اكتشاف برهان صورى لصحة مبرهنه بعينها فان هذا لا يبرهن على ان المبرهنه ليست صحيحه.[١] فما الذى يمكن ان يمثل كبرهان بأن مبرهنه بعينها ليست صحيحه. سوف نقوم بعرض طريقه قريبه من منهج قائمه الصدق الا انها اقصر منها بكثير .

الاستدلال غير الصحيح هو الاستدلال الذى يبدأ من مقدمات صادقة وتكون النتيجة كاذبه . فاذا وجدنا منهج يمكن عن طريقه اسناد قيم الصدق والكذب لأجزاء المبرهنه بحيث تكون المقدمات صادقه والنتيجة كاذبه فاننا نبرهن بذلك على عدم صحه المبرهنه.[٢]

فمثلا اذا كان لدينا المبرهنه التاليه :

(ق⊂ل) . (م ⊂ل) : ⊂ : ق ⊂م

من الواضح ان هذا القياس غير صحيح طبقا للقياس الفرضى . لكننا سنتبع طريقة اخرى للبرهنه[٣]. نحن نعلم ان قضيه اللزوم تكون كاذبه فقط عندما يكون المقدم صادق والتالى كاذب . فاذا اردنا ان تكون النتيجه " (ق⊂ل) " كاذبه ، فاننا نعطى القيمه " صادق " للمقدم " ق " والقيمه " كاذب " للتالى "م". ونعطى قيم صدق لمكونات المقدمات بحيث تكون المقدمات صادقه . وبناء على المبدأ الذى مؤداه ان قضيه اللزوم تكون دائما صادقه فى حالة صدق التالى ، فاننا نسند القيمه " صادق " الى

---

(١) Copi, Introduction to Logic, p. 262

(٢) Searles. H.L., Logic and Scientific Methods, 3rd. edt., New York, 1968, p. 105.

(٣) المرجع السابق ، ص ١٦٥

كل من التاليين اى الى "ل" فى كل من المقدمتين. وتؤدى الاجراءات السابقة الى مقدمات صادقة ونتيجه كاذبه وهكذا نبرهن على عدم صحة المبرهنه . ويمكن ان يوضح هذا البرهان بطريقه قريبه من طريقه قائمه الصدق وذلك كما يلى :

ق	ل	م	ق ⊂ل	م ⊂ل	ق ⊂م
صادقة	صادقة	كاذبه	صادقة	صادقة	كاذبه

ويعتبر كوبى ان طريقة برهنه عدم الصحه بديل لطريقة قوائم الصدق وان كان هناك ارتباط اساسى بينهما (١) . فمن الواضح ان طريقة برهنه عدم الصحه تكتب فى خط واحد افقيا ، ويمثل هذا الخط صف واحد من صفوف قائمه الصدق التى يمكن اجرائها من اجل نفس المبرهنه . فبرهان عدم صحة المبرهنه قائم على وجود صف واحد على الاقل من صفوف قائمه صدقها تكون فيه المقدمات صادقه بينما تكون النتيجه كاذبه . وبناء على ذلك لن يكون هناك ضروره لفحص كل صفوف قائمه الصدق لنكتشف عدم صحه المبرهنه . بل يكفى اكتشاف صفا واحدا تكون فيه المقدمات كلها صادقه والنتيجة كاذبه (٢) . ومن ثم فإن الطريقة الراهنه لبرهنه عدم الصحه هى طريقة لتكوين مثل هذا الصف بدلا من اجراء قائمه صدق كامله .

---

(١) Copi, Introduction to Symbolic Logic, p.263.

(٢) المرجع السابق ، ص ٢٦٤

الفصل الثالث
حساب دالات القضايا

تناولنا القضية - في حساب القضايا - باعتبارها كل واحد، وبحثنا العلاقات القائمه بين القضايا المختلفه ، بغض النظر عن المكونات الداخليه لها . ولذلك فان حساب دالات القضايا يستهدف معرفة مكونات القضيه ودراسة العلاقات التى يمكن ان تنشأ بين هذه المكونات . ومن ثم فاننا فى حساب الدالات نقوم بتحليل للتركيب الداخلى للقضيه .

والقضيه الذريه هى القضيه التى لا تحتوى على أى من الروابط المنطقيه او عوامل الاجراء القضائيه وهى ما كنا نرمز لها فى حساب القضايا بالمتغيرات "ق" ، "ل" ..الخ . واذا ما اخذنا القضية " هيوم فيلسوف " كمثال للقضيه الذريه وتأملنا تركيبها الداخلى ،وجدنا انها تتكون من جزئين . فهذه القضيه تحتوى على موضوع وتمثله كلمه " هيوم " والتى تدل على شخص ما ، وكذلك على محمول وتمثله كلمه " فيلسوف " والتى تشير الى صفة ما لذلك الشخص . اى ان ما تخبرنا به هذه القضيه ان هناك شخص ما له صفه بعينها .

وفى الواقع ان كلمة محمول فى حساب الدالات لا تدل على الصفات فقط بل تدل كذلك على العلاقات والافعال كذلك . فمثلا فى العبارتين :

١ - احمد يحب خالد
٢ - عمرو اطول من زيد

نجد ان الفعل " يحب " والعلاقه " اطول من " هما من المحمولات فى حساب الدالات .

وسوف نستخدم الحروف الابجديه " س" ، "ص" كرموز متغيرات للاشياء ، والحروف " ح " ، " د " كرموز متغيرات للمحمول . فاذا ما رمزنا " لهيوم " بالرمز " س" و لـ " فيلسوف " بالرمز " ح " . فان الصوره الرمزيه للقضيه " هيوم فيلسوف" تكتب فى حساب الدالات كما يلى :

ح (س)

والواقع انه لكى يتضح مفهوم دالة القضيه علينا ان نتناول بالتوضيح المقصود بالمتغيرات والثوابت وذلك كما يلى :

المتغيرات والثوابت :

من الاهميه بمكان ان نحدد ما نعنيه بالمتغير والثابت لأنهما من المفاهيم الضروريه لفهم معنى التصورات الأساسيه فى حساب الدالات .

عادة ما تقام التفرقه بين المتغيرات والثوابت على اساس ان الثابت هو ما لا يتغير معناه وان المتغير هو الرمز الذى لا معنى له بذاته . وعادة ما يرمز للمتغيرات بحروف الهجاء مثل أ ، ب ، جـ ، س ، ص .... الخ .

فالرمز الثابت هو ما لا يتغير معناه بتغير مواضعه فالاعداد ١ ، ٢ ، ٣ .... الخ كلها ثوابت . وايضا الروابط المنطقيه مثل " $\vee$ " ، " $\supset$ " ، " $\equiv$ " هى كلها من الثوابت ذلك انها ثابته المعنى .

ولكن فى المنطق قد نستخدم من حروف الهجاء ما نشير به الى الثوابت المفترضه فى نسق ما دون ان تكون متعينه واقعيا . فمثلا قد نستخدم الحروف أ ،ب ، جـ او أيه حروف اخرى من حروف الهجاء كرموز ايضاحيه illustrative symbols لافراد

محددين ان كانوا غير متعينين فى الواقع [١]. ولقد استخـــــدم كارنـاب الحروف الهجائيه من بدايه الابجديه الانجليزيه للدلالـــه على الثوابت الفرديه فى الانساق كالتى قام بتكوينها [٢]. وكمـا استخدم كل من رسل و ستبنج كذلك الحروف الهجائية للدلاله علـــى ثوابت فرديه محدده وان كانت غير متعينه واقعيا .

اذن اذا كانت الحروف الهجائيه التى تستخدم للدلاله علـــى المتغيرات قد تستخدم كذلك للدلاله على ثوابت فما هو الفرق بيـــن الثابت والمتغير ؟

الواقع يوجد ثلاث معان خاطئه تسند للمتغير وهى :

أولا: يعرف المتغير بانه " حجم يتغير " او " تصور متغيـــــر" لكن هذا التعريف خاطىء لان التصور والحجم لا يكون أيـا منها متغير رغم انه يمكن للشىء ان يكتسب خصائص مختلفـــه فى ازمان مختلفه .

ثانيا: يعرف المتغير بانه رمز ذا معنى متغيرvarying meaning لكن هذا التعريف غير صحيح لان التغير فى معنى الرمـــــز ليس ممكنا داخل اللغه الواحده ،ذلك ان التغير فى المعنى يؤدى الى الانتقال من لغة الى آخرى [٣].

ثالثا: يعرف المتغير بانه الرمز الذى لا يحدد معناه ، بينمـــا يكون الرمز المحدد المعنـــى ثابتا . ولكن هذا التعريـــف خاطىء ايضا لانه من الممكن استخدام ثوابت بدون تحديـــــد معناها ويكون اختلافها عن المتغير فى كونها لا تسمـــــح بالتبديل [٤].

---

(١) Stebbing, A Modern Elementary Logic, P. 130.

(٢) Carnap, Introduction to Semanties, . 32.

(٣) Carnap, Logical Syntax of Language, p. 189.

(٤) المرجع السابق ، نفس الموضع .

اذن فان التفرقه الصحيحه بين كل من المتغيرات والثوابت انما تكون على اساس صفه بنائيه Syntactical character خاصه بهم وهى صفة القابليه للابدال . فالمتغيرات فى اى نسق تكون خاضعه للتبديل طبقا لقواعد هذا النسق ووفقا لشروط بعينها اى ان الفارق بين كل من المتغير والثابت ليس فى كون الثابت له معنى محدد بينما لا يكون للمتغير معنى ، بل ان الفارق بينهما ان الثابت لا يمكن ابداله بينما المتغير هو الذى يكون خاضعا للتبديل .

فمثلا اذا استخدمنا الحروف أ ، ب ، جـ للدلاله على ثوابت فردية داخل نسق ما واستخدمنا الحروف س ، ص كرموز للمتغيرات ، فاننا عندما نقول " س اغريقى " فان هذه العبارة لا تكون قضيه من الوجهه المنطقية ذلك اننا لا يمكن ان نحكم عليها بالصدق والكذب لوجود المتغير " س " بها . ولكن " س " يمكن ابدالها بأى من الثوابت أ ، ب ، جـ ، فنقول " أ اغريقى " وهذه العباره تمثل قضيه لان " أ " ثابت ومن ثم يمكن الحكم على صدق هذه القضيه بناء على قواعد التكوين الخاصه بالنسق .

ففى حالة " س " كرمز للمتغير يمكن ان اضع بدلا منها اى ثابت من الثوابت الفرديه التى تعتبر قيما للمتغير . اما فى حالة " أ " كرمز لثابت لا يمكن ان اضع بدلا منه اى ثابت فردى بل الثابت الذى يشير له الرمز فقط .

الداله القضائيه :

وبناء على التعريف السابق للمتغيرات والثوابت ستكون العبارت التى مثل :

" س فيلسوف "

" س أخ ص "

هى عبارات لا معنى لها ذلك ان " س " ، " ص " لا تشيـــــران الى شىء بذاته . فلا يمكن الحكم على العباره " س فيلسوف "بانها صادقه او كاذبه وبالتالى لا تكون قضيه من الوجهه المنطقيــــه . كما يمكن كتابة العبارتين السابقتين على النحو الاتى :

" ...... فيلســـوف "
" ...... اخ .... "

أى استخدمنا الفراغات بدلا من الرموز . ويكون استخـــدام الرموز للدلاله على عدد القيم التى يجب ان نملاء بها الأماكـــن الشاغره .

ولقد استخدم راسل العلامه " ^ " لوضعها فوق الرمـــــز للدلاله على انه يعنى به الاماكن الشاغره وتبعه فى ذلك رايشنباخ ، اذا مـــــا استخدمنا العلامه " ^ " متابعين فى ذلك راســـل فان التعبير عن الصياغتين السابقتين يكون كالاتى :

انســـان (سٌ)
اخ (سٌ ، صٌ)

فوجود العلامه " ^ " فوق الرمز دليل على عدم استعمال الرمز كمتغير بل للدلالة على الاماكن الشاغرة التى يجب ان نملاءها امـــا بالمتغيرات او بالثوابت . فالتعبير " انسان (سٌ) " لا يعنـــى ما يعنيه التعبير " انسان (س) " حيث اننا نكون قد ادخلنـــا المتغير " س " بينما لم يكن موجودا فى التعبير" انسان(سٌ) " . وذلك فان العلامه " سٌ " يكون لها نفس الدور الذى يؤدية الفراغ فى التعبير " .... انسان"(١)

والعبارات التى مثل "انسان (سٌ) " ، " أخ (سٌ ، صٌ)" هى ما يطلق عليها دالات قضائية propositional functions

---

(١) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p. 82.

وعلينا ان تفرق بين عدد من المفاهيم وهى :

- الداله function
- الداله القضائيه propositional function
- القيمه المتغيره او المبهمه variable or ambiguous value
- والقضيه proposition

اذا اردنا ان نوضح المقصود بمصطلح الداله فلنتأمل التعبيرين الاتيين :

انسان (سَ̂)

يحب (سَ̂ ، صَ̂)

نجد ان المقصود بالداله فى التعبيرين السابقين هما " انسان " و " يحب " اى ان كلمة " داله " تطلق على المحمول سواء كان صفه او علاقه . ولقد اطلق على المحمول مصطلح " داله " لانه يتوقف عليه فئة الاشياء ألتى تعتبر قيما صحيحه ويمكن وضعها فى الاماكن الشاغرة وهى ما يطلق عليها حجج arguments الداله . فالداله ترادف ما كان يطلق عليه – فى المنطق التقليدى – المحمول predicate ،وترادف " الحجه " ما كان يطلق عليه الموضوع subject .

ويلاحظ ان بعض المناطقه لم يستخدم مصطلح " داله " بدلا من " اسم المحمول " بل ظل مستعملا له ، ومن هؤلاء نذكر كارناب الذى استخدم مصطلح " المحمول " للدلاله على كل من صفات الاشياء والعلاقات القائمه بينها (١)

والواقع ان دالة القضيه ليست هى بالضبط الداله بل هى الداله مع قواعد استخدامها . فيذكر رايشنباخ انه " يمكن تعريف دالة القضيه باعتبارها اسم – داله باستخدام تركيبى معين "(٢)

---

(١) Carnap, Logical Syntax of Language, p. 27.

(٢) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p. 82.

اى ان رايشنباخ يعرف داله القضيه فى ضوء العلاقه التركيبيه للداله . فعادة ما تتخذ الداله علاقه تركيبيه بعينها مع الحجه عند تكوين قضيه ما . وهذه العلاقه التركيبيه تتخذ ترتيب بعينه فى اللغه الجاريه . فعادة ما يكتب اسم ـ الحجه argument - name ويتبعه الرابطه ثم اسم ـ الداله function - name مثل " Socrates is human "سقراط انسان". فكلمة " سقراط " هى اسم الحجه وكلمة "انسان" هى اسم الداله اما الرابطه فهى لا تظهر فى اللغه العربيه بينما نجدها فى اللغات الاخرى وهى تمثلهاكلمه" IS " فى القضيه المذكوره بالانجليزيه .

بينما يكون لهذه العلاقه صياغه رمزيه فى المنطق الرياضى يعبر عنها بواسطة الاقواس وذلك كما يلى :

انسان (سقراط)

اى ان اسم ـ الداله يكون خارج الاقواس بينما يكون اسم الحجه بداخلها. وعلى أساس هذه العلاقه التركيبية يطلق مصطلح " الداله القضائيه " على اسم ـ الداله[1] . اى ان اضافه الصفه " قضائيه " للحد داله هو فقط لبيان المستوى الذى يستخدم فيه الحد " داله " .

ولقد سبق وأوضحنا الفارق بين " ح (سَ) " و " ح (س)" حيث ان " سَ " مثلها مثل الفراغ فى التعبير" ... انسان". وهذه الصياغه الرمزيه " ح (سَ) " هى ما يطلق عليها كل من راسل ورايشنباخ مصطلح " الداله القضائيه " . اما بعد ادخال المتغير اى عندما تصبح الصياغه " ح (س) " فاننا نجد اختلافا بين المناطقة حول تسميتها . فنجد رايشنباخ يطلق عليها المصطلح

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

" داليه " functional (١) ، ويستخدم كارناب مصطلح " جمل مفتوحه " ، وتعتبرها ستبنج صوره قضائيه ، بينما يطلق عليها راسل " القيمه غير المتعينه للقضيه "(٢)

ويرى راسل ضرورة التمييز بين الداله وبينما القيمه غير المتعينه لها فيذكر : " اذا كتبنا القيمه غير المتعينه للداله هكذا " ϕ (x) " فاننا سنكتب الداله نفسها هكذا " ϕ ($\hat{x}$) " وبذلك فانه يجب القول ان ϕ (x) تكون قضيه proposition بينما " ϕ $\hat{x}$ " تكون داله قضائيه"(٣) .

وسوف نقوم باستخدام مصطلح " داليه " للدلاله على الداله بعد ادخال المتغير بها (اتباعا لرايشنباخ) .

وتعتبر دالة القضيه جزءا من الداليه او من القيمه الغير متعينه للقضيه ، اى ان " ح $\hat{س}$ " جزء من " ح (س) " . ويتوقف صدق الداليه على كل من الداله " ح " ومعنى " س " المستخدمين فيها . وبكون دالة القضيه جزء من الدالية فانها لا تكون صادقه او كاذبه لان قيم الصدق لا يمكن ان تنطبق الا على القضيه وليس على جزء منها .(٤)

اما القضيه او القيمه الثابته للداله فهى الناتجه من وضع ثابت فى المكان الشاغر او من استبدال المتغير بثابت . فمثلا اذا وضعنا " هيوم " بدلا من المكان الشاغر فى داله القضيه :

فيلسوف ($\hat{س}$)

يكون الناتج القضيه :

فيلسوف (هيوم)

---

(١) المرجع السابق ، ص ٨٦

(٢) Russell, Principia, p. 39

(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٤) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p. 85.

وهى قضيه يمكن الحكم عليها بالصدق او الكذب .

واذا كان راسل قد اوضح ان الداله القضائيه هى شئ ما يحتوى على متغير ما " س " ويعبر عن قضيه اذا ما تعينت قيمة " س " الا انه اتبع ذلك شرحا يوضح المقصود بدقه بدالة القضيه - كما سبق وبينا .

وفى رأينا لا يجدر الاكتفاء عند تعريف دالة القضيه بانها مجرد تعبير يحتوى على متغير او اكثر فلا يمكن الحكم عليه بالصدق او بالكذب . لان هذا التعريف لدالة القضية ان هو الا تعريف فضفاض يمكن ان يتضمن تعبيرات اخرى غير التى قصد بها ان تكون دالة قضيه فى " حساب الدالات " لمجرد احتوائها على متغيرات وذلك لما يلى من اسباب :

١) اذا ما اعتبرنا دالة القضيه هى التعبير المحتوى على متغير يمكن اعتبار تعبيرات مثل " هيوم س " او" سقراط ص " هى دالات قضايا على اعتبار ان " س " ، " ص " متغيرات . ولكن - فى الواقع - لا يمكن اعتبار مثل هذه التعبيرات دالات قضايا لان المقصود بالدالة هو المحمول وليس الموضوع . ومن ثم فان بعض المناطقة لم يستخدم كلمة " داله " بل ظل مستخدما لكلمه " محمول " - كما سبق وذكرنا .

٢) كما انه ليس من الدقه القول بان الداله القضائية ان هى الا تعبير يحتوى على متغير غير متعين القيمه لانه - كما سبق ورأينا - تكون الداله مع المتغير " قيمه غير متعينه للداله" عند راسل وتكون " صورة قضيه " عند ستبنج ، وتكون " داليه " عند رايشينباخ بينما هى " جمله مفتوحه " عند كارناب .

ولقد استخدم رسل مصطلح " داله القضيه " واطلقه على القيمه الغير متعينه للداله لانها تماثل فى بعض النواحى للدالهالرياضيه . فداله القضيه - عند رسل - تتفق مع الدالات فى الرياضيات فى كونها تحتوى على متغير غير متعين القيمه بينما تختلف عنها

فى ان قيمتها تكون قضيه .[1]

وما يهمنا توضيحه هو ان الداله القضائية ليست مجـــــرد عباره محتويه على فراغ يجب ملأه ، بل ان الداله القضائية يقصد بها المحمول عندما ينتج عن استخدامه قضيه . فالصياغه الرمزيه :

ح (سٌ)

ان هى الا داله قضائية يقصد بها ان الصفه " ح " دالـــــه للشيء الذى سنملاء به الفراغ الكائن بين القوسين ، كما ان هـذا الشيء يعتبر بدوره حجه argument للداله ويكون الناتج قضيه - فاذا كانت " ح " رمز للمحمول " انسان " ووضعنا " سقراط " بدلا من " سٌ " فان الناتج هو القضيه :

انسان (سقـــراط)

كما انه يكون للداله " ح " العديد من الحجج فمثـــــــلا " افلاطون " ،" زيد " ." عمرو " كلها حجج للداله " ح " .

وبذلك - بناء على ما سبق - يمكن القول ان هناك فرقاً بيـــن الداله ودالة القضيه وصورة القضيه .

فالداله يقصد بها المحمول سواء كان صفه مثل " انسان " او فعل مثل " يحب " او علاقه مثل " اكبر من " .

اما دالة القضية فهى الداله عند استخدامها طبقا لقواعـــد معينها مثل :

ح (سٌ)

ولقد استخدمت العلامه " ^ " فوق الرموز بدلا من الفراغـات فى دالات القضايا لتوضيح عدد الحجج التى يجب ان نملاء بهـــــــا

---

(١) Russell, Principia, p. 38.

الاماكن الشاغره فمثلا الداله القضائيه :

ح (سٓ ، صٓ)

اذا ما استخدمنا الفراغات تصبح :

ح (.... ، ....)

فلا يتبين منها وجوب ملاء الفراغات بحجتين مختلفتين .

اما صورة القضيه وهى التى يطلق عليها احيانا مصطلح " داليه " او " قضيه مفتوحه " فهى تختلف عن القضيه فى كونها محتويه متغيرات لتوضيح التركيب الداخلى للقضية وهى مثل :

ح (س)

وعلينا ملاحظه الفارق بين كل من " ح (سٓ) و " ح (س " حيث ان " ح (س) " تعنى " شىء ما له الصفه (ح)" بينما " ح (سٓ) تعنى الصفه التى تكون لشىء ما"(١).

انواع الدالات :

يمكن تصنيف الدالات طبقا لعدد المواضع الشاغرة التى يجب ان تملىء بالحجج .

فهناك مثلا الداله ذات الموضع الواحد مثل :

" .... انسان "

وهى التى يعبر عنها بالصياغه الرمزيه التاليه :

ح (سٓ)

وعاده ما تكون الداله ذات الموضع الواحد معبره عن صفه

---

(١) Stebbing, A Modern Elementary Logic, p. 131.

يتصف بها شيء ما .

وهناك داله ذات موضعين مثل :

" ...... اكبر من .... "

والتى يعبر عنها رمزيا كما يلى :

" سْ اكبر من صْ "

وهى داله ذات موضعين ، ويجب ان تملاء مواضع الفراغات بحجتين مختلفتين . حتى تصبح الداله قضيه . فمثلا يمكن القول:

" زيد اكبر من عمرو "

وعادة ما تكون الداله ذات الموضعين معبره عن علاقات .

وتوجد الداله ذات الثلاث مواضع . فمثلا نجد فى القضيه " بطرس يعطى بول كتابا " ان الدالة " يعطى " هى داله ذات ثلاث مواضع (١) . ويعبر عنها رمزيا كالاتى :

ح (سْ ، صْ ، وْ)

كما يمكن تكوين دالات ذات اربعة مواضع او اكثر من ذلك بالنسبه لعبارات اكثر تركيبا وتعقيدا (٢).

الاستيفاء :

يعتبر تصور الاستيفاء من التصورات الهامه فى حساب دالات القضايا . والاستيفاء ان هو الا العلاقه بين الاشياء ودالات القضايا (٣) فنقول مثلا ان شيئا ما يستوفى دالة القضيه اذا ما كانت الصفه التى تحددها الداله تصدق على هذا الشيء .

(١) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p.83.

(٢) المرجع السابق ، ص ٨٤

(٣) Tarski, The Sementic Conception of Truth, p. 63.

فمثلا بالنسبه لدالة القضيه ذات الموضع الواحد ح (سْ) يوجد مجموعه من الحجج والتى تجعل من القضايا الناتجه قضايا صادقه . فاذا ما اتخذنا الداله القضائيه :

انسان (سْ)

كمثال نجد انه يوجد مجموعه من الحجج التى تجعل منها قضيه صادقه مثل هيوم ، زيد ، سقراط . لاننا اذا قلنا " هيوم انسان " او " زيد انسان " او " سقراط انسان " كانت كلها قضايا صادقة . ويطلق على مجموعه هذه الحجج فئه الحجج المستوفاه لداله القضيه class of satisfying arguments وعادة ما تمثل هذه الفئه ما صدق الداله القضائية (١)

وبذلك فإن الماصدق هو فئه الاشياء التى يتحقق بها المحمول او الداله . واذا لم يوجد حجج تحقق الداله فإن الفئه المطابقه او الماصدق يكون فارغا.(٢) فمثلا الداله" س وحيد القرن" لا توجد حجه تحققها فمن ثم تكون الفئه المطابقه لها فئه فارغه .

تحويل دالات القضايا الى قضايا :

يمكن تحويل دالة القضيه الى قضيه بطريقتين اما باجراء التخصيص او بتقييد المتغيرات الوارده بها او ما يطلق عليه التسوير .

١ – اجراء التخصيص :

وتكون طريقة التخصيص او التبديل بوضع قيمه محدده فى مكان الحجه . فمثلا اذا ما استبدلنا " سقراط " بالمكان الشاغر فى الداله " اغريقى (سْ) " ستكون القيمه الناتجه هى القضيه " اغريقى (سقراط) " وهى قضيه صادقه . اما اذا استبدلنا

---

(١) Reichanbach, Elements of Symbolic Logic, P.86.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

" ابن سينا " بالمكان الشاغر لاصبحت القضيه " اغريقى (ابـــــن سينا)" وهى قضيه كاذبـه .

اذن يمكن الحصول على قضايا من دالات القضايا بوضع الثوابت بدلا من الاماكن الشاغره وهى ما يطلق عليها طريقة التخصيص.(١)

٢ - التسوير : Quantification

ان اجراء التخصيص ليس هو الطريقه الوحيده لتكوين قضيـــه من دالة قضيه كما سبق وذكرنا . فهناك طريقه اخرى للحصول علـــى القضايا بواسطة عوامل اجرائيه وهى ما يطلق عليها التسويـــر او تقييد المتغيرات binding of variables .

وتكون عمليه تقييد المتغيرات بوضع الاسوار قبل الدالـــه . والاسوار هى ما تعبر عن التكميم فى القضيه . وسوف نتناول كـــل من السور الكلى والسور الوجودى كما يلى :

(١) السور الكلـى :

احيانا ما نتحدث عن شيء ما وننسب له صفه بعينها مثلمـــا نقول " هذه الزهرة ذات رائحه زكيه " واذا ما رمزنـــــا " للزهره " ب " أ " وللصفه " الرائحه الزكيه" ب " ح " نتعبر عن القضيه السابقه رمزيا كما يلى :

ح (أ)

ولكن قد يحدث ان يكون كل فرد من افراد الفئه التـــــى ينتمى لها " أ " متصفا بهذه الصفه ايضا ، فإننا نعبـــر عن ذلك باستخدام المتغير (س) الذى يمكن استبدالـــه ونضع اى فرد من الافراد بدلا منه ونقول " بالنسبه لاى س

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

فإن (س) هو (ح) " وتكتب رمزيا كما يلى :

(س) (ح س)

وتكون القضيه (س) (ح س) " قضيه كليه [١] . وتسمى (س) التى فى مقدمه القضيه الكليه بعامل الاجراء الكلى وتمثل (ح س) ما يخضع للاجراء operand [٢]

وعلى ذلك فإننا يمكن ان ننتقل من داله القضيه :

ح (سَ̂)

الى القضيه : " بالنسبة لكل س ، ح (س) "

وهو ما عبرنا عنه بالصياغه الرمزيه :

(س) ح (س)

وهذا التعبير - رغم احتوائه على متغيرات - ليس صور قضيه بل قضيه . ذلك ان المتغيرات الوارده به متغيرات مقيده وليست متغيرات حره فيكون له قيمه صدق محدده . فهو يختلف عن الداليه :

ح (س)

ذلك ان المتغير " س " الوارد فى الداليه متغير حر لا يخضع لعامل اجراء يقيده ومن ثم لا يكون له قيمه صدق محدده ككل بل له قيمه صدق لكل قيمه من قيم " س " على حده [٣]

اما اذا اردنا ان نعبر عن القضيه الكليه السالبه فإن النفى لا يكون لعامل الاجراء بل لما يخضع للاجراء فإذا اردنا ان نعبر عن القضية الكليه السالبه " كل شجاع ليس كاذب " رمزيا فان صياغتها كالآتى :

(س) ~ (د س)

---

(١) Carnap, Introduction to Symbolic Logic, P. 34.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع

وتقرأ : بالنسبه لأى س فان س ليس د ,

(٢) السور الوجودى :

والقضيه الوجوديه تؤكد وجود عضو او ما صدق واحد على الاقل من ما صدقات موضوع القضيه ، وتصفه بانه كذا وكذا[١]

وللتوصل الى القضيه الوجوديه فإننا ننتقل من داله القضيه " د (سْ) " الى القضيه " يوجد س بحيث يكون س هو د " والصياغة الرمزيه هى:[٢]

(E س) د (س)

فاذا كانت " د (س) " تعنى س ذكى ، فإن الصياغه السابقه تعنى " يوجد على الاقل فرد واحد هو س بحيث يكون ذكى " .

ويطلق على الرمز (E س) عامل الاجراء الوجودى existential operator .

وللتعبير عن القضيه الوجوديه السالبه فان النفى يكون لما يخضع للاجراء وليس لعامل الاجراء . فالصياغة الرمزيه للقضيه الجزئيه السالبه " بعض الناس ليسوا اذكياء " هى :

(E س) ∼ د س

العلاقه بين السور الكلى والسور الوجودى :

نلاحظ مما سبق ان القضيه الكليه السالبه ليست هى القضيه المنفى عامل الاجراء بها بل هى القضيه التى ينفى ما يخضع

---

(١) د. عزمى اسلام ، اسس المنطق الرمزى ، ص ٢٨٦

(٢) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, P. 89.

للاجراء بها . اما اذا قمنا بنفى عامل الاجراء الكلى فإن القضيه الكليه ستعنى نفس ما تعنيه القضيه الوجوديه السالبه .

فاذا كان لدينا القضيه الكليه الموجبه " كل الاشياء حيوانات " وهى ما يعبر عنها رمزيا كما يلى :

(س) ح س

فإننا بنفى عامل الاجراء الكلى (س) سيكون لدينا :

~ (س) ح س

وتقرأ " ليس كل الاشياء حيوانات " وهى تكافىء القول " انه يوجد شىء ما س وهو ليس حيوان " وهو ما يعبر عنه بالصياغه الرمزيه :

(E س) ~ ح س

ومعنى ذلك ان :

~ (س) ح س ≡ (E س) ~ ح س (١).

كما ان نفى عامل الاجراء الوجودى يعنى نفس ما تعنيه القضيه الكليه السالبه .

فالقول بانه " لا يوجد فرد واحد س بحيث يكون خالدا " وصياغته الرمزيه :

~ (E س) ح س

تعنى " كل فرد ليس خالد " وصياغته الرمزيه :

(س) ~ ح س

اذن : (E! س) ح س ≡ (س) ~ ح س (٢)

واذا قمنا بنفى كلا من الشطرين فى (١) ،(٢) سنصل الــــى التكافؤين التاليين:[1]

(س) ح س ≡ ~ (E س) ~ ح س

(E س) ح س ≡ ~ (س) ~ ح س

تسوير القضايا الحمليه فى المنطق التقليدى :

عادة ما نصنف القضايا الحمليه فى المنطق التقليدى الــــى ما يلى :

الكليه الموجبه	:	كل انسان مفكر
الكليه السالبه	:	لا انسان خالد
الجزئيه الموجبه	:	بعض الطلبه ناجحين
الجزئيه السالبه	:	بعض الطلبه ليسوا ناجحين

ويمكن اتخاذ اجراءات التسوير ازاء هذه القضايا اذا ما عبرنا عنها فى صورة دالات القضايا وذلك كالآتى :

١ - القضيه الكليه الموجبه :

القضيه " كل انسان مفكر " تعنى ان :

" كل ما هو انسان هو مفكر "

اى انها تعبر عن علاقه لزوم بين صفتى الانسانيه والفكر ومن ثم يمكن القول :

" بالنسبه لأى س اذا كان س انسان فانه يلزم ان يكـــون س مفكرا " .

واذا ما استخدمنا علامه اللزوم " ⊃ " فاننا يمكن كتابتها هكـــذا :

---

(١) المرجع السابق ، ص ٩١

" بالنسبة لأى س ، (س انسان) ⊂ (س فان) "

واذا ما عبرنا عنها بالصياغه الرمزية لدالات القضايا تصبح :

(س) (ح س ⊂ د س)

وبذلك يكون التعبير " ح س ⊂ د س " دالة قضيه ممثله لصورة قضيه شرطيه مركبه من قضيتين بسيطتين لهما نفس الموضوع[1].

اذن تعبر القضيه الكليه الموجبه عن علاقة اللزوم .

٢ - **القضيه الكليه السالبه :**

وتعنى القضيه " لا انسان خالد " انه :

" بالنسبه لأى س اذا كان س انسان اذن س ليس خالد " .

وباستخدام علامه اللزوم " ⊂ " تصبح :

" بالنسبة لأى س ، س انسان ⊂ س ليس خالد "

وهو ما يمكن ان يعبر عنه بالصياغه الرمزيه لدالات القضايا كما يلى :

(س) ح س ⊂ ~ د س

ومن ثم فإن القضيه الكليه السالبه تعبر كذلك عن علاقه اللزوم .

٣ - **القضيه الجزئيه الموجبه :**

تعنى القضية " بعض الطلبه ناجين " انه :

" يوجد على الاقل كائن واحد وهو طالب وناجح فى نفس الوقت"

واذا ما استخدمنا المتغير " س " تصبح :

(١) Copi, Introduction to Symbolic Logic, p. 278.

" يوجد على الاقل س بحيث ان س طالب و ناجح "

فاذا ما استخدمنا علامة العطف " . " بدلا من واو العطف تصبح :

" يوجد على الاقل س بحيث ان س طالب . س ناجح " .

وباستخدام الصياغه الرمزيه لدالات القضايا تكون الصياغه الرمزيه للقضيه الجزئيه الموجبه كما يلى :

(E س) (ح س . د س)

ومن ثم فان القضيه الجزئيه الموجبة تعبر عن علاقه العطف لأن القضيه " بعض الطلبه ناجحين " تعنى ضرورة وجود شخص واحد على الاقل وان هذا الشخص يتصف بكونه طالبا وناجحا فى نفس الوقت .

٤ – القضيه الجزئيه السالبه :

وتعنى القضيه " بعض الطلبه ليسوا ناجحين " انه :

" يوجد على الاقل كائن واحد يكون طالبا وليس ناجح " .

وبادخال المتغير " س " يعبر عنها كما يلى :

" يوجد على الاقل س بحيث ان س طالب و س ليس ناجح "

وباستخدام علامه العطف " . " :

" يوجد على الاقل س واحد بحيث ان س طالب . س ليس ناجح " .

وتكون الصياغه الرمزيه لها هى :

(E س) (ح س . ~ د س)

وبذلك فان القضيه الجزئيه السالبه مثلها مثل الجزئيه الموجبه تعبر عن علاقة العطف .

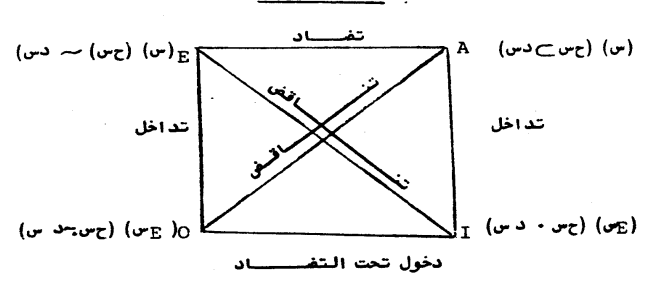
ويتضح مما سبق الفرق بين القضايا الكليه والقضايا الجزئية فى ضوء ادخال الاسوار .

فالقضيه الكليه قضيه لزوم لا تتكلم عن وجود ما صدقات بالفعل انما تخبرنا انه اذا كانت هناك اعضاء فى فئة معينه فانها يكون لها الصفه الوارده فى المحمول [١] لذلك عبرنا عن القضيه الكليه باللزوم بين دالتين .

اما القضيه الوجوديه فهى تؤكد وجود عضو واحد على الاقل وتصفه بالصفه الوارده فى المحمول . اى انها لا تفترض اتصاف العضو " س " بصفه ما فى حالة وجوده بالفعل بل تقرر وجوده بالفعل وتنسب له الصفه [٢]

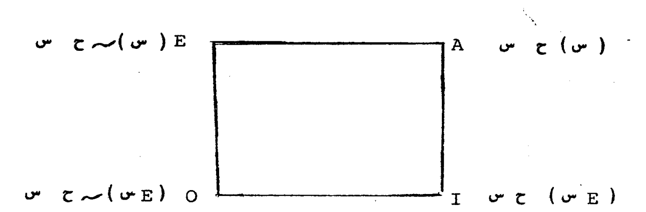
ويمكننا - بناء على ما سبق - ان نعبر عن مربع التقابل فى المنطق التقليدى بواسطه القضايا الكليه والوجوديه وذلك كما يلى: [٣]

مربع التقابل



(١) د. عزمى اسلام ، اسس المنطق الرمزى ، ص ٢٨٦
(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع
(٣) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, P.93.

كما يمكن التعبير عن مربع التقابل بكتابة القضايا بطريقه ابسط وذلك كما يلى :



ومن ثم فالعلاقات التى تنشأ من تقابل القضايا الحمليه هى علاقات التناقض ، التضاد ، الدخول تحت التضاد والتداخل .

وتقوم علاقه التناقض contradiction بين قضيتين مختلفتين كما وكيفا اى بين الكليه الموجبه والجزئيه السالبه او بين الكليه السالبه والجزئيه الموجبه .

ويكون حكم الصدق للقضيتين المتناقضتين – فى المنطق التقليدى – هو انهما لا يمكن ان يصدقا معا ولا يكذبا معا ، اى اذا صدقت احداهما كذبت الاخرى والعكس صحيح . فكل من القضيتين المتناقضتين تكون نفيا للأخرى .

وتقوم علاقه التضاد contrariety بين قضيتين كليتين . مختلفتين فى الكيف ، اى تقوم بين الكليه الموجبه والكليه السالبه .

وحكم صدق القضيتين المتضادتين – فى المنطق التقليدى انهما لا يصدقان ولكن قد يكذبان معا . اى اذا بدأنا بافتراض صدق احدُهما فلا بد ان تكون الاخرى كاذبه . لكن العكس ليس صحيح لان القضيتين المتضادتين قد يكذبان معا بمعنى اننا لو بدأنا بافتراض كذب احداهما فانه لا يمكن الحكم بصدق او كذب القضيه الاخرى .

ولكن حكم الصدق للقضيتين المتضادتين فى المنطق الرياضى يختلف عنه فى المنطق التقليدى . ذلك انه يشترط كى تستبعد كل من القضيتين المتضادتين الاخرى ان تكون الفئه التى يمثلها الموضوع ليست فارغه اى تكون ذات ما صدقات بالفعل والا تكون كلتاهما صادقه .(١)

فالقضايا الكليه - كما سبق واوضحنا - قضايا شرطيه وليست وجوديه اى انها لا تقرر وجود افراد بالفعل بل ما تقرره هو اقتران صفات اذا حدث وتواجد الافراد . فالقضية الكليه " كل وحيد قرن جميل " تقرر انه اذا كان هناك ما يمكن ان نصفه بانه وحيد قرن فانه لا بد وان يكون جميلا . وما دام لا يوجد ما يمكن ان نطلق عليه " وحيد القرن " فإن القضيه الكليه الموجبه " كل وحيد قرن جميل " مثلها مثل " كل وحيد قرن ليس جميل " اى انهما متساويتان من حيث الصدق و الكذب .

اما علاقه الدخول تحت التضاد sub-contrariety فهى تكون بين القضيتين الجزئيتين المختلفتين كيفا اى بين الجزئيه الموجبه والجزئيه السالبه . والقضيتان الداخلتان تحت التضاد لا يكذبان معا ولكنهما قد يصدقان معا . اى ان الحكم بكذب احداهما يستلزم صدق الاخرى ، ولكن الحكم بصدق احداهما لا يستلزم صدق او كذب الاخرى .

ولكن حكم الصدق فى المنطق الرياضى يختلف عنه فى المنطق التقليدى . فالعلاقه بين القضيتين الداخلتين تحت التضاد مثلها مثل علاقة التضاد فلا يمكن ان نستدل على صدق احدى القضيتين من كذب القضيه الاخرى الا اذا كان هناك ما صدقات فعليه لموضوع القضيه الداخله تحت التضاد(٢)، اى ان القضيتان الداخلتان تحت التضاد لا تستبعد كل منهما الاخرى الا اذا كانت الفئه المطابقه للموضوع ليست فارغه .

---

(١) المرجع السابق ، ص ٩٦
(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

وتقوم علاقه التداخل Sub-alternation بيـــن قضيتين مختلفتين كما لا كيفا اى انه يكون بين الكليه الموجبه والجزئيه الموجبه ، وبين الكليه السالبه والجزئيه السالبه .

وحكم الصدق للقضيتين المتداخلتين هو انه اذا صدقت الكليه صدقت الجزئيه المتداخله معها وليس العكس . واذا كذبت الجزئيه كذبت الكليه المتداخله معها وليس العكس .

ولكن من وجهه نظر المنطق الرياضى يكون من الخطأ استدلال صدق القضيه الجزئيه من صدق القضية الكليه . ذلك لان القضيـــه الكلية لا تقرر وجود افراد بالفعل بينما تقرر القضية الجزئيـــه وجود فرد واحد على الاقل . فالقضايا الكليه شرطيه بينمـــا القضايا الجزئيه وجوديه لذلك لا يمكن الاستدلال الا اذا كانـــت الفئه المطابقة للموضوع ليست فارغه .(١)

الصدق فى دالات القضايا :

لقد سبق ورأينا – فى حساب القضايا – ان القضيه قد تكـــون صادقة او كاذبه ، ورغم عدم امكانيه الحكم على دالة القضيه بأنها صادقه او كاذبه الا ان رسل يرى انه يمكن الحكم عليها بانهـــا صادقة فى كل الاحوال " true in all cases او صادقـــه فى بعض الاحوال " true in some cases.(٢)

و " الصدق الدائم " صفه تتصف بها الدالات التى يمكـــن ان تتحول الى قضايا كليه ، فى حين ان " الصدق فى بعض الاحوال " صفه توصف بها الدالات التى يمكن ان تصبح قضايا جزئيه .(٣)

كما يمكن ان تتصف الداله بانها كاذبه دائما اذا ما كانت نفيا لداله صادقه دائما . فالقضيه الكليه " كل انسان فـــان "

---

(١) المرجع السابق ص ٩٥

(٢) Russell, Introduction to Mathematical Philosophy, p. 157.

(٣) د. عزمى اسلام ، اسس المنطق الرمزى ، ص ٢٩٨

هى تعبير عن الداله الصادقه دائما " اذا كان س انسان فإن س فان " . ومن ثم فإن القضيه " لا انسان فان " نفى للقضيه السابقه ولذلك فانها تكون معبره عن الداله الكاذبه دائما " اذا كان س انسان فإن س ليس فان[١]، ومن ثم يمكن القول بثلاث قيم صدق للدالات القضائيه ذات الموضع الواحد .

ولذلك يصنف رايشنباخ الدالات القضائية ذات الموضع الواحد من حيث الصدق الى دالات صادقه دائما always true ودالات كاذبه دائما always false ودالات مختلطه mixed اى تكون احيانا صادقه واحيانا كاذبه . ومن ثم يكون هناك ثلاث سمات لصدق الدالات القضائيه ذات الموضع الواحد وهى ما يرمز لها رايشنباخ بالحروف M, E, A وسنرمز لها بالحروف " م " (صادقه دائما) ، " ب " (كاذبه دائما) ." ط (مختلطه) ويطلق رايشنباخ على القضايا المشتقه من الدالات القضائيه مصطلح "مشتقات داليه" functional derivatives[٢]، وتشتمل هذه المشتقات على القضايا الكليه universal propositions والقضايا الوجوديه existential propositions والداليات functionals وتحدد قيم صدق المشتقات الداليه بواسطه سمات صدق الدالات ويمكن ان نعبر عن هذه العلاقات فى قائمه الصدق رقم (١)

(١) د (سˆ)	(٢) (س) د (س)	(٣) (E س) د (س)	(٤) د (س)
م	ص	ص	ص
ط	ك	ص	ص ، ك
ب	ك	ك	ك

القائمه رقم (١)

---

(١) Russell, Intro. to Mathematical Philosophy,. I60

(٢) chenbach, Elements of Symbolic Logic, p.125.

شرح القائمه رقم (١) :

١) يمثل العمود رقم(١) دالة القضيه " د (سٓ) " وقد كتبت سمات الصدق الخاصه بها اسفلها . وهذه السمات هى : صادقة دائما (م) ، مختلطه (ط) ، كاذبه دائما (ب) .

٢) اما العمود رقم(٢) فيمثل القضيه الكليه "(س) د (س) " المشتقه من دالة القضيه د (سٓ) . وتكون قيمه صدق القضية الكليه انها صادقه " ص " عندما تكون الداله صادقه دائما " م " وتكون القضيه الكليه كاذبه " ك " عندما تكون الداله مختلطه " ط " ذلك ان القضية الكليه ينطبق المحمول فيها على جميع افراد المَوضوع فاذا ما انطبق فى بعض الحالات ولم ينطبق فى ،لبعض الآخر بناء على كون الداله مختلطه فان القضيه الكليه تكون كاذبه . وتتسم القضيه الكليه بالكذب اذا ما كانت الداله كاذبه ذائما .

٣) ويمثل العمود رقم(٣) القضيه الوجوديه " (E س) د (س) " المشتقه من داله القضيه " د (سٓ) " وتكون القضيه الوجوديه صادقه (ص) اذا كانت الداله صادقه دائما " م " . وتصدق القضية الوجوديه اذا ما كانت الداله مختلطه وذلك عكس القضيه الكليه . ذلك ان القضية الوجوديه تقرر اتصاف فرد واحد على الاقل بالصفه الوارده بالمحمول . وتكون القضيه الوجوديه كاذبه " ك " اذا ما كانت الداله كاذبه دائما "ب".

٤) اما العمود (٤) فيمثل الداليه د (س) المشتقه من داله القضيه د (سٓ) . وتتسم الداليه بالصدق اذا كانت الداله صادقه دائما ، وتكون اما صادقه واما كاذبه اذا كانت الداله مختلطه وتكون كاذبه اذا كانت الداله كاذبه دائما.

وتشابه القائمه رقم(١) قوائم الصدق الخاصه بالقضايا الا انها تختلف عنها فى امرين . اولا تنقسم الدالات الى ثلاث

مقولات بينما تنقسم القضايا الى مقولتين . وبذلك يمثل حساب دالات القضايا ذات الموضع الواحد نسق ثلاثي القيم Three-Valued system . ثانيا فى بعض الاحيان لا يمكن تحديد قيمه صدق المشتقات الداليه لانه عندما تكون الداله مختلطه فان قيمة صدق الداليه يكون لا محددا Indeterminate اى انه يمكن ان يكون صادقا او كاذبا .

اهم الاجراءات الخاصه بدالات القضايا :

فى الواقع يمكن ان تنطبق عوامل الاجراء الخاصه بالقضايا على دالات القضايا الا ان سمة الصدق الناتجه عن استخدام هذه الاجراءات مختلفه فى دالات القضايا عنها فى القضايا .

فاذا كانت قائمه الصدق الخاصه بقضيه مركبه من قضيتين . تكون ذات اربعه امكانات للصدق لان لكل قضيه قيمتى صدق فقط ، فإن قائمه الصدق الخاصه بعوامل الاجراء الثنائيه بين الدالات ستكون ذات تسع امكانات للصدق . ذلك لان للداله الواحده ـ كما سبق وذكرنا ـ ثلاث امكانات للصدق وبربط دالتين معا ستكون هناك ٣٢ = ٩ امكانات للصدق . ويمكن ان يكون ذلك اكثر اتضاحا عند تناولنا للاجراءات كما يلى :

أولا: اجراء النفى :

اذا كان لدينا الداله :

د (سٌ)

واردنا نفيها فاننا نضع علامه النفى " ~ " امامها ونكتبها كما يلى

~ د (سٌ)

ويمكن معرفه سمه الصدق للداله الناتجه من استخدام اجراء النفى من خلال القائمه رقم(٢)[1] :

---

(١) المرجع السابق ، ص ١٢٦

~ د (سً)	د (سً)
ب	م
ط	ط
م	ب

القائمه رقم(٢)

وبذلك يتضح من القائمه رقم(٢) انه اذا كانت الداله "د(سً)" صادقه دائما " م " فان الداله النافيه لها "~ د (سً) " تكون كاذبه دائما . واذا كانت الداله " د(سً) " مختلطه " ط " فان الداله "~ د (سً) " تكون مختلطه " ط " كذلك . واذا كانت " د (سً) " . كاذبه دائما " ب " فإن "~ د (سً) " تكون صادقه دائما " م " (١)

ثانيا: اجراء الفصل :

اذا كان لدينا الداله " د (سً) " والداله " ح (سً) " فاننا يمكن ان نجمع بينهما فى داله مركبه بواسطه اجراء الفصل السابق تطبيقه فى حساب القضايا . وينتج عن تطبيق اجراء الفصل على الدالتين السابقتين الداله التاليه :

د (سً) ∨ ح (سً)

ويمكن معرفه قيم صدق الداله الناتجه عن اجراء الفصل بواسطة القائمه رقم(٣)

---

(١) لقد كان دوبيسلاف Dubislav هو اول من اقام قوائم الصدق الخاصه بدالات القضايا ولقد اخذها عنه رايشنباخ . انظر فى ذلك : المرجع السابق ، ص ١٢٧

د (س̂)	ح (س̂)	د (س̂) ∨ ح (س̂)
م	م	م
م	ط	م
م	ب	م
ط	م	م
ط	ط	م ، ط
ط	ب	ط
ب	م	م
ب	ط	ط
ب	ب	ب

القائمه رقم (٣)

ويتضح من القائمه رقم(٣) انه يمكن تحديد قيم صدق الداله " د (س̂) ∨ ح (س̂) " فى جميع الاحوال التى تكون عليها قيم صدق الدالتين " د (س̂) " ، ح (س̂) " المكونتين لها فيما عدا حاله واحده فقط وهى التى تكون فيها كلتاهما من النوع المختلط. ولذلك نجد انه يكون للداله "د (س̂) ∨ ح (س̂) " اكثر من قيمه صدق واحده اذا ما كانت الدالتان المكونتين لها من النوع المختلط . فهى تكون اما مختلطه " ط " او صادقه دائما " م " طبقا للدالات المستخدمه فاذا كانت الداله د (س̂) " م " بينما الداله " ح (س̂) " ب " فإن الداله الناتجه "د (س̂) ∨ ح (س̂) " تكون " م " والا كانت " ط " ولا يمكن ان تكون " ب "(١)

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

ثالثا: اجراء العطف :

اذا كان لدينا الدالتان " د (س̂) " ، (ح (س̂) " واردنا ان نطبق عليهما اجراء العطف فإن الصياغه الرمزيه للداله الناتجه منهما تكون على النحو الآتى :

د (س̂) ٠ ح (س̂)

ويمكن معرفه قيم صدقها من خلال القائمه رقم(٤) ٠

د (س̂)	ح (س̂)	د (س̂) ٠ ح (س̂)
م	م	م
م	ط	ط
م	ب	ب
ط	م	ط
ط	ط	ط ، ب
ط	ب	ب
ب	م	ب
ب	ط	ب
ب	ب	ب

القائمه رقم (٤)

ويتضح من القائمه رقم(٤) انه يمكن تحديد قيم صدق الداله : " د (س̂) ٠ ح (س̂) " فى جميع الاحوال فيما عدا الحاله التى يكون فيها عنصريها من النوع المختلط ٠ وفى هذه الحاله تكون الداله " د (س̂) ٠ ح (س̂) " إما " ط " أو " ب " وتكون

" د (س̂) • ح (س̂) " " ط " اذا ما صدق عنصراها لحجه واحده على الاقل والا كانت " ب "(١)

رابعا: اجراء اللزوم :

اذا اردنا تطبيق اجراء اللزوم على الدالتين " د (س̂) " " ح (س̂) • فان الصياغة الرمزية ستكون على النحو الآتى :

د (س̂) ⊂ ح (س̂)

ويمكن معرفه قيم صدق الداله " د (س̂) ⊂ ح (س̂) " من خلال القائمه رقم(٥)

د (س̂)	ح (س̂)	د (س̂) ⊂ ح (س̂)
م	م	م
م	ط	ط
م	ب	ب
ط	م	م
ط	ط	م ، ط
ط	ب	ط
ب	م	م
ب	ط	م
ب	ب	م

القائمه رقم(٥)

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

خامسا: اجراء التكافؤ :

ويعبر عن التكافؤ بين الدالتين " د (سٓ) " ، و " ح (سٓ) " بالصياغه الرمزيه التاليه :

د (سٓ) ≡ ح (سٓ)

ويمكن معرفه سمات الصدق للداله الناتجه عن اجراء التكافؤ بين دالتين من القائمه رقم (٦) ٠

د (سٓ)	ح (سٓ)	د(سٓ) ≡ ح (سٓ)
م	م	م
م	ط	ط
م	ب	ب
ط	م	ط
ط	ط	م ،ط ،ب
ط	ب	ط
ب	م	ب
ب	ط	ط
ب	ب	م

القائمه رقم(٦)

ويمكن تفسير سمات الصدق صادق دائما " م " مختلط " ط " ، كاذب دائما " ب " باعتبارها ممثله للجهات modalities اى ممثله لمفاهيم الضرورة necessity و الامكـــــان possibility ،والاستحاله impossibility . فاذا كانت الداله صادقه دائما فانها تكون ضروريه ، واذا كانت احيانا صادقه

تكون الدالـه ممكنه ؛ اما اذا كانت الداله كاذبه دائمـا فانها تكون مستحيله.[1]

ويمكن توضيح ذلك ببعض الامثله ، فمثلا صفة " الجاذبيـه " للمغناطيس تعتبر داله ضروريه لانها تتحقق لأى مغناطيس . فعندما نقول " انه من الضرورى ان يجذب المغناطيس قطعه الحديد " . فاننا نعنى ان كل مغناطيس يتصف بذلك اى ان الداله " اذا كان س مغناطيس يستلزم ان س يجذب قطعه حديد " تكون من النـوع الصادق دائما.[2]

اما صفه " الاحمرار " بالنسبه للاشياء فهى صفه ممكنـه لانها تتحقق لبعض الاشياء ولا تتحقق للبعض الآخر فعندما نقـول " ان شيئا ما احمر " فإن هذا يعنى انه يوجد اشياء حمـراء اى ان الداله " احمر " من النوع المختلط.[3]

اما اذا قلنا " من المستحيل ان يوجد شىء يكون عنقـاء " فإن هذا يعنى ان الداله " عنقاء " داله كاذبه دائما. وكمثـال آخر لنفترض وجود حقيبه محتويه على عدد من الكرات فاذا كانـت الكرات جميعها بيضاء فان الداله " س ابيض " تكون ضروريـه . اما اذا كان بعض الكرات ابيض فان الداله " س أبيض " تكـون ممكنه . اما اذا لم تكن الكرات بيضاء فان الداله " س ابيض" بالنسبة للكرات التى بالحقيبه تكون داله مستحيله.[4]

---

(١) Russell, Intro. to Mathematical Philosophy, p. 165.

(٢) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, P.127

(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٤) Russell, Intro. to Mathematical Philosophy, p. 165.

استدلالات خاصة بالقضايا ذات الاسوار :

اذا اردنا اقامة براهين صوريه لصحة مبرهنات ترتكز صحتها على التكوين الداخلى للقضايا غير المركبه الحادثه بها فانه يلزم اضافه بعض القواعد الجديده الى قواعد الاستدلال السابق ذكرها عند الحساب التحليلى للقضايا وهذه القواعد هى :

١ – **قاعده التعميم الكلى :** Universal generalization

تمكننا هذه القاعده من ان نستبدل السور الفردى singular quantifier بسور كلى . فمثلا يشترط دستور الولايات المتحده ان لا يقل عمر عضو مجلس الشيوخ عن ثلاثين سنه ، فاذا كان جون دو عضوا بمجلس الشيوخ فانه يجب الا يقل عمره عن ثلاثين سنه . واذا طبق هذا المؤهل على اى عضو بالمجلس فانه ينطبق على كل عضو ، ومن ثم يمكننا ان ننتقل من اى عضو نختاره عشوائيا الى الكل[1]. واذا رمزنا لأى عضو نختاره جزافا بـ " أ " فاننا يمكن ان نعبر عن هذه القاعده رمزيا على النحو الاتى :

ح (أ)
――――
∴ (س) ح س

حيث تصدق " ح " على اى فرد يمكن اختياره عشوائيا .

٢ – **التعميم الوجودى :** Existential generalization

وبتطبيق هذه القاعده يمكن استبدال السور الفردى بالسور الوجودى . فترتكز هذه القاعده على الافتراض الذى مؤداه اذا

(١) Searles, Logic and Scientific Methods, p. 175.

اتصف فرد بصفه بعينها وكان منتميا الى مجال معين اذن يجب ان يكون من الصدق ان يتصف بعض الافراد المنتمين لهذا المجال بهذه الصفه [1] . فمثلا اذا اتصف طالب بانه رياضى فانه يمكن القول ان " بعض الطلبه رياضيون " ذلك اننا نعبر عن القضيه الجزئيه بالسور الوجودى وهو يعنى انه " يوجد فرد واحد على الاقل يتصف بكذا و كذا ". وطالما انه يوجد فرد يتصف بصفه بعينها فانه يمكن الانتقال من السور الفردى الى السور الوجودى ويمكن ان يعبر عن هذه القاعده رمزيا كما يلى :

ح أ

∴ (E س) ح س

٣ - **التمثيل الكلى :** Universal Instantiation

وبناء على هذه القاعده فانه يمكن الانتقال من القضيه الكليه الى مثال فردى لها . لانه اذا صدقت القضية بالنسبه لكل فرد فانها تصدق كذلك لأى فرد نختاره عشوائيا [2] . فمثلا اذا قلنا " اذا كان س انسان فان س فان "فانه يمكن القول "سقراط فان" بناء على ان سقراط احد افراد الناس . وهذا ما يعبر عنه بالصياغه الرمزيه التاليه :

(س) ح س

∴ ح أ

٤ - **التمثيل الوجودى :** Existential Instantiation

وتمكنا هذه القاعده من ان نمثل للقضيه الوجوديه بقضيه فرديه . اى اننا ننتقل من القضيه الوجوديه الى قضيه فرديه

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

حيث ان السور الوجودى يعنى انه " يوجد على الاقل فرد واحد بحيث .... ". فالتسوير الوجودى لدالة القضيه يكون صادقا اذا كان له مثال بديل صادق . من ثم ، ايا كانت الصفه التى ترمز لها " ح " فإن " (E س) ح س " تؤكد انه يوجد على الاقل فرد واحد يحوز الصفه " ح " (١). ومن ثم يمكن استخدام ثابت فردى وليكن " أ " لنشير به الى الفرد الذى يحوز الصفه " ح " ومن ثم فإن " ح أ " تكون مثالا بديلا صادقا. فمثلا اذا قلنا " بعض الطلبه ناجحون " فإن هذا يعنى " وجود طالب واحد على الاقل ناجح " ويمكن ان نشير له بالثابت " أ " وهذا ما يعبر عنه رمزيا على النحو الاتى :

(E س) ح س

∴ ح أ

حيث تكون " أ " ثابتا فرديا لم يسبق حدوثه فى سياق الاستدلال .

امثله على المبرهنات :

١ - المبرهنه الاولى :

وتحتوى هذه المبرهنه على مقدمتين كليتين ونتيجه كليه وكمثال لها :

كل المعادن تتمدد بالحراره
كل الحديد معدن

كل الحديد يتمدد بالحراره

(١) Copi, Introduction to Symbolic Logic, p.288.

وهو ما يمكن صياغته رمزيا كما يلى :

(س) (ح س ⊂ د س)
(س) (ى س ⊂ ح س)

∴ (س) (ى س ⊂ س)

البرهـــان :

١)	(س) (ح س ⊂ د س)	مقدمه
٢)	(س) (ى س ⊂ ح س)	مقدمه
٣)	ح أ ⊂ د أ	من(١) وقاعده التمثيل الكلى
٤)	ى أ ⊂ ح أ	من(٢) وقاعدة التمثيل الكلى
٥)	ى أ ⊂ د أ	من(٤) ، (٣) والقيــن الفرضى
٦)	(س) (ى س ⊂ د س) (نتيجه)	من(٥) وقاعدة التعميم الكلى

٢ - المبرهنه الثانيه :

وتحتوى هذه المبرهنه على مقدمنين احداهما كليه والاخرى جزئيه والنتيجه جزئيه وهذا يتضح فى المثال التالى :

كل الناجحين سعداء
بعض الناس ناجحون

∴ بعض الناس سعداء

والصياغه الرمزيه هى :

(س) (ح س ⊂ د س)
(E س) (ى س ٠ ح س)

∴ (E س) (ى س ٠ د س)

<u>البرهـــان :</u>

قبل ان نقدم خطوات البرهان يجب توضيح شرط هام ٠ فطالمـا اننـا سنستخدم قواعد التمثيل الوجودى والتمثيل الكلى فى هـــذا الاستنباط ينبغى تطبيق قاعدة التمثيل الوجودى للصياغه الوجوديه قبل تطبيق قاعده التمثيل الكلى للصياغه الكليه(١). ذلك اننا اذا طبقنا فى هذا المثال قاعده التمثيل الكلى على الخطوه (١) بعـد الخطوه (٢) لنحصل على الخطوه (٤) ، فلن نستطيع اشتقاق الخطـوه (٣) ، طالما ان قاعدة التمثيل الوجودى لا تسمح باستخـــــدام ثابت سبق حدوثه فى سياق الاستدلال ٠ وفيما يلى خطوات البرهان:

١)	(س) (ح س ⊂ د س)	مقدمه
٢)	(س (ى س ٠ ح س)	مقدمه
٣)	ى أ ٠ ح أ	من(٢) وقاعده التمثيل الوجودى
٤)	ح أ ⊂ د أ	من(١) وقاعده التمثيل الكلى
٥)	ح أ ٠ ى أ	من(٣) وقاعده التبادل
٦)	ح أ	من(٥) وقاعده التبسيط
٧)	د أ	من(٤) ،(٦) وقاعده الوضع بالوضع
٨)	ى أ	من(٣) وقاعده التبسيط
٩)	ى أ ٠ د أ	من(٧) ،(٨) والعطف
١٠)	(E س) (ى س ٠ د س)(نتيجه)	من(٩) والتعميم الكلى٠

Searles, Logic and Scientific Methods, p.177. (1)

المبرهنه الثالثه :

كل الورود ذات رائحه ذكيـــه
بعض النباتات ليست ذات رائحه ذكيه

∴ بعض النباتات ليست ورود

والصياغه الرمزيه :

(س) (ح س ⊂ د س)
(E س) ك س ٠ ∼ د س)

∴ (E س) (ك س ٠ ∼ ح س)

البرهـــان:

١) (س) (ح س ⊂ د س) مقدمه
٢) (E س) (ك س ٠ ∼ د س) مقدمه
٣) د أ ٠ ∼ ك أ من(٢) وقاعده التمثيل الوجودى
٤) ح أ ⊂ د أ من(١) والتمثيل الكلى
٥) ∼ د أ ⊂ ∼ ح أ من(٤) واللزوم العكسى
٦) ∼ د أ من(٣) والتبسيط
٧) ∼ ح أ من(٥) ،(٦) والوضع بالوضع
٨) د أ من(٣) والتبسيط
٩) د أ ٠ ∼ ح أ من(٧) ،(٨) والعطف
١٠) (E س) (ك س ٠ ∼ د س)(نتيجه) من(٩) والتعميم الوجودى

المبرهنه الرابعه :

كل انســان فـــان
سقـراط انســـان

∴ سقـراط فان

الصياغه الرمزيه :

(س) (ح س ⊂ د س)

ح أ

____

∴ د أ

البرهان :

١) (س) (ح س ⊂ د س) مقدمه

٢) ح أ مقدمه

٣) ح أ ⊂ د أ من(١) وقاعده التمثيل الكلى

٤) د أ من(٣) ،(٢) والوضع بالوضع

المبرهنه الخامسه :

لا افريقى خائن

كل المصريين افريقيون

____

∴ لا مصرى خائن

الصياغه الرمزيه :

(س) (ح س ⊂ ∼ د س)

(س) (ى س ⊂ ح س)

____

(س) (ى س ⊂ ∼ د س)

البرهان :

١) (س) (ح س ⊂ ∼ د س) مقدمه

٢) (س) (س ⊂ ح س) مقدمه

٣) ح أ ⊂ ∼ د أ من(١) والتمثيل الكلى

٤) ى أ ⊂ ح أ من(٢) والتمثيل الكلى

٥) ى أ ⊂ ∼ د أ من(٤) ،(٣) والقياس الفرضى

٦) (س) (ى س ⊂ ∼ د س) من(٥) والتعميم الكلى .

الفصل الرابع
حساب الفئات

اذا ما استعرضنا التطور التاريخى للمنطق الرياضى نجد ان نظرية حساب الفئات هى أول نظريات المنطق الرياضى تطورا . واذا كان لنظرية حساب الفئات الأوليه فى التطور الا انهـا لبست لها السبق بالنسبه للمبادىء المنطقيه . حيث ان كل بحث فى نظرية الفئات يستخدم مبادىء نظريه القضايا ، لانه لكى نقرر ارتباطا بين فئتين بطريقه ما ان هو الا تقرير لقضيه (١) .

مفاهيم أساسيـه :

هناك مفاهيم أساسيه يجدر بنا القيام بتوضيحها حتى يتسنى تفهم نظريه الفئات . وسوف نتناول أهم هذه المفاهيم وذلك على النحو الآتى :

١ - مفهوم الفئه :

يعتبر راسل انه من اصعب المشكلات فى الفلسفه الرياضيه واعظمها اهميه ان نتمثل فى الذهن تمثلا واضحا المقصود بالفئه (٢) .

وهناك امثله كثيره لمفهوم الفئه فى حياتنا اليوميه فكثيرا ما نتحدث عن " فئه الطلبه " و " فئه الاساتذه " و " فئه الرياضيين " وعادة ما يشار للفئة باعتبارها " فئه كذا و كذا " اى الفئه التى يتميز اعضاؤها بسمه معينه . فاتصاف الفرد بسمه معينه هو ما يجعله منتميا لفئه بعينها . فمثلا لا يمكن لأى شخص ايا كان ان ينتمى " لفئة الطلبه " الا

---

(١) Cohen, M. R. & Nagel, E., An Introduction to Logic, New York, 1962, p. 121.

(٢) راسل ، أصول الرياضيات ، ص ١٢١

اذا كان طالبا ، فكونه طالبا هى السمه التى تحدد عضويتـــه فى فئه الطلبه .

والواقع توجد طريقتان بصفه عامه لتكوين الفئـــات . وترتكز هاتان الطريقتان على التفرقه بين المفهوم والماصدق . فهناك من يرى ـ وبخاصه الرياضيون ـ ان الفئه تتكون علـــى اساس الماصدق . أى أن الفئه تتكون بواسطه عد الافراد المكونين لها والمرتبطين بواو العطف مثل فئة " محمد و حسين وزيد وعمرو" وبذلك نحصل على فئه يكون اعضاؤها هم"محمد وحسين وزيد وعمرو".

وقد تتكون الفئه على أساس المفهوم وهى الطريقه التـى يقول بها الفلاسفه على وجه الخصوص . وكمثال على ذلك فئـــه " طلبه السنه الثالثه فلسفه " والتى يمكن ان تضم عددا كبيرا من الطلبه ممن ينطبق عليهم مفهوم " طلبه السنه الثالثـــه فلسفه " .

ويرفض راسل الأخذ بأى من الطريقتين كل على حده ويقـــول بضروره الجمع بينهما ، ويرى " ان هناك مواقع متوسطة بيـــن المفهوم البحت والماصدق الخالص وفى هذه المناطق المتوسطـــه يقوم المنطق الرمزى "(١).

ويفرق راسل بين كل من "الفئه " و " فئه التصور"و"تصور الفئه" فنجده يقول :

" قد جرى العرف على تسميه " الانسان " فئة تصور ، غيـر ان الانسان لا يدل فى استعماله العادى على أى شئ. ومـــن جهة اخرى فإن " الناس " و " جميع الناس " (وهو ما سأعتبره مترادفا) يدل بالفعل ، وسأفترض ان ما يدلان عليه هو الفئـــه المؤلفه من جميع الناس . على هذا يكون " الانسان " هـــو

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

فئة التصور و " الناس " (التصور) هو تصور الفئه ، والناس (الشيء الذى يدل عليه التصور " الناس ") هى الفئه [١].

والواقع أن تفرقه راسل عظيمه الأهميه لأنه يفرق بذلك بين مستويين . المستوى الاول ويمثله الافراد الواقعيون المكونون للفئه ويمثلون ماصدقاتها . والمستوى الثانى يمثله الالفاظ ويميز فيه بين نوعين النوع الاول هو الالفاظ الداله على الفئه مثل لفظة " الناس " وهى ما يطلق عليها " تصور الفئه " ، والنوع الثانى هو الالفاظ الداله على تصور الفئه مثل لفظة " الانسان " و هى ما يطلق عليها " فئة التصور " اى مفهوم الفئه .

اى ان راسل قد اجرى تفرقه بين :

١) الناس (أى الافراد الذين يدل عليهم التصور "الناس") وهم المكونون للفئه او الممثلون للماصدق .

٢) " الناس " وهى اللفظه الداله على تصور الفئه أى انها اللفظه التى تدل على الفئه المولفه من جميع الناس .

٣) " الانسان " وهى فئة التصور او مفهوم الفئه .

واعتقد ان تفرقه راسل بين(١) ،(٢) انما هى لتوضيح الفارق عندما نتحدث عن الاشياء وعندما نتحدث عن الالفاظ الداله على الاشياء ، اى اننا نكون فى مجال التمييز بين اللغه الشيئيه و ما بعد اللغه . ومما يؤكد ذلك انه عندما يكون حديثا عن الاشياء . فاننا لا نضع الكلمات بين اقواس وعندما يكون الحديث عن الالفاظ ذاتها فانها توضع بين اقواس .

والتفرقه بين(١) ،(٣) اى بين " الفئه "و" فئه التصور" هى تفرقة بين الماصدق والمفهوم . وهذه التفرقه واجبه وضروريه

---

(١) المرجع السابق ، ص ١٢٢ .

لأنه اذا وحدنا بين " الفئه " و " فئه التصور " يجب التسليم بأن فئتين قد تكونا متساويتين دون ان تكونا متطابقتين مثال ذلك فئتى التصور " الانسان " و " الماشى على قدمين عارى الريش " . ومع ذلك فمن الواضح انه حين يوجد فعلان متساويان فثمة شئ من التطابق بينهما لاننا نقول ان لهما نفس الحدود[١]. وعلى ذلك هناك شئ ما لا شك فى اشتراكه عند تساوى فئتين تصوريتين ويبدو ان هذا الشئ هو الاجدر بتسمية " الفئة "[٢]. فمثلا " فئه الماشى على قدمين عارى الريش " هى بعينها " فئه الناس " رغم اختلاف فئه التصور الخاصه بكل منهما . لذلك لا ينبغى ان نطابق بين الفئه وبين فئة التصور ، ومن ثم نتخلص من متناقضه الهويه . وتكون الهويه القائمه بين" الناس" و " الماشى على قدمين عارى الريش " هى هوية الماصدق بينما تختلف المفاهيم .

كما ان نظرية راسل قد أدت الى حسم مشكلة الفئات الصفريه . اذا كان مفهوم الفئه هو انها تكون ذات اعضاء فانه يستحيل ان نقول بفئه وتكون خاليه من الاعضاء لأن " ما كان مجرد جمع للحدود لا يمكن ان يقوم اذا ارتفعت جميع الحدود "[٣]. ولكن بناء على التفرقه بين الفئه وتصور الفئه وفئة التصور لن تكون هناك فئات صفريه بل ما يكون صفريا او خاليا من الاعضاء هو فئة التصور (اى المفهوم) وتصور الفئه (اللفظه الداله على الفئه) .

وبناء على ما سبق يمكن القول ان نظرية راسل تهدف الى تحقيق ما يلى :

١) التفرقه بين انماط اللغه (اللغه الشيئيه وما بعد اللغه) .

---

(١) المرجع السابق ، ص ١٢٤
(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع
(٣) المرجع السابق ، ص ١٣٣

٢) التفرقة بين المفهوم والماصدق مما أدى الى حل متناقضة الهوية .

٣) حسم مشكلة الفئات الصفرية .

وبذلك تكون الفئة هى جمع من الحدود ينطبق عليه تصور بعينه . فاذا اردنا ان نكون فئة الاعداد الاولية علينا ان نبين جميع المفردات التى ينطبق عليها التصور " عدد اولى " كما يمكن القول ان الفئة هى المجال القابل للتطبيق لتصور ما وهذا المجال هو ما يطلق عليه ماصدق التصور(١).

ويمكن تفسير مفهوم الفئة باستخدام " الداليه " فاذا كانت لدينا الداليه :

" س انسان "

فعندما نضع قيما بدلا من المتغير " س " فان بعض هذه القيم قد تجعل من الداليه قضيه صادقه والبعض الآخر قد يجعل منها قضيه كاذبه . فمثلا " عمرو " و " زيد " و " محمد" جميعها قيم تجعل من الداليه " س انسان " قضيه صادقه . اما اذا استبدلنا بالمتغير " س " القيم " العدد ٢" و " مثلث " و " القط " ستكون القضيه الناتجه كاذبه . والمعيار الذى طبقا له يكون الفرد عضوا فى " فئة الناس " هو ان يمثل قيمه صادقه للمتغير " س " الوارد فى الداليه " س انسان". و"فئة الناس" ان هى الا المجموعه الكليه للقيم الصادقه للمتغير " س " .

اذن يمكن تعريف الفئه فى ضوء الداليه طالما انها تقدم المعيار للعضويه بالفئه . وبذلك تكون الفئه هى مجال تطبيق التصور المعبر عنه بواسطه الداليه .

---

(١) Langer, S., An Introduction to Symbolic Logic, New York, 2nd. edd., 1953, p. 116.

٢ – الفئه الشامله : Universal Class

كما عرفنا فإن الفئه هى جمع من أشياء تتصف بصفات معينه . واذا افترضنا ان العالم يتكون من الفئات أ ، ب ، جـ وتناولنا الفئه أ فان ما يتبقى فى العالم هو كل ما لا ينتمى للفئه أ اى ان العالم يكون محتويا على الفئة أ والفئه لا أ والتى نرمز لها بالرمز أ/ .

وعادة عندما نتحدث فاننا لا نتحدث عن العالم بصفه عامه بل عن عالم مقال بعينه ،فمثلا عالم المقال فى كتب الرياضيات هو جميع الاعداد . وقد يكون عالم المقال خاصا بمقال بعينه مثل الاعداد او الالوان ، وقد يكون عاما شاملا لجميع الفئات التى يمكن ان نتحدث عنها .

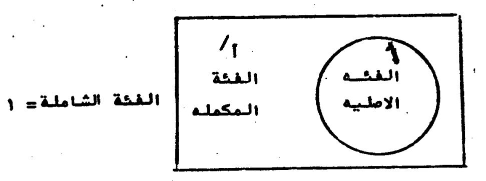
وعالم المقال هو نفسه المقصود بالفئه الشامله . وعادة ما يرمز لعالم المقال او الفئه الشامله بالواحد الصحيح . اى يعبر عن الفئه الشامله كما يلى :

الفئـه الشامله = ١

واذا ما كانت الفئه الشامله هى فئه الالوان واخترنا منها فئه اللون الاحمر واشرنا لها بالرمز " أ " ستكون باقى فئات الالوان هى " أ/" اى ان الفئه الشامله تكون محتويه على أ ، أ/ ويعبر عن ذلك بالصياغه الرمزيه التاليه :

١ = أ + أ/

ويعبر عن ذلك ايضا بالشكل الاتى :



شكـــل (١)

حيث يطلق على الفئه " أ " التى اخترنا التحدث عنهـــا الفئه الاصليه . ويطلق على الفئه " أ/" الفئه المكمله .

٣ - **الفئة الفارغه :** Null Class

الفئه الفارغه هى الفئه التى لا اعضاء لها وتسمى ايضا الفئه الصفريه . ومن الامثله على الفئات الصفريه فئه الدوائر المربعه " لانه لا يوجد شئ يحقق الداليه " س دوائر مربعه " . ومن ثم لا يوجد شئ يكون عضوا " بفئة الدوائر المربعـــه" . ويعبر عن الفئه الفارغه رمزيا كما يلى :

الفئه الفارغه = صفر

واذا كان لكل فئه يوجد فئه مكمله لها وتمثل الفئتـــان معا الفئه الشامله ، فان الفئه الشامله لا بد ان يكون لهـــا هى الأخرى فئه مكمله وهى الفئه الفارغه .

٤ - **الفئه ذات العضو الوحيد :** Unique-Class

وهى الفئه التى بها عضو واحد فقط . وقد يبدو مفهـــوم الفئه ذات العضو الوحيد مفهوما صعبا لأن معظمنا يتناول الفئه باعتبارها تجميع افراد فى مجموعه . فبناء على تفسير الفئـــه فى ضوء الداليه نجد ان لبعض الداليات functionals تطبيق واحد مفرد ، اى ان المتغير الوارد بها يكون له قيمـــه

مفرده والتى تجعل منها قضيه صادقه .

وعلى ذلك لا يشترط ان تكون الفئات ذات عدد كبير من الاعضاء ، فهناك فئات لا تحتوى الا عضوا واحدا فقط . فمثلا فئه " العدد الزوجى الاول " هى فئه ذات عضو واحد ذلك ان العضو الوحيد بها هو العدد" ٢ " .

وعلينا ان نفرق بين الفئه ذات العضو الواحد وبين هذا العضو الوحيد(١). ذلك ان ما يمكن قوله عن الفئه لا يمكن قوله عن الفرد ، فكلاهما من انماط منطقيه مختلفه .

العلاقات الاساسيه بين الفئات :

١ - عضوية الفرد فى فئه واحتواء فئه فى فئه :

ان القول بالقضيه " سقراط اغريقى " يختلف عن القول بالقضيه " الاغريق ناس " . ويفرق راسل بينهما ويرى ان الفرق بينهما كالفرق بين علاقه الفرد بالنوع وعلاقه النوع بالجنس(٢). فالقضيه الاولى تمثل عضوية الفرد " سقراط " فى فئة "الاغريق". بينما تمثل القضيه الثانيه علاقه احتواء inclusion بين فئتين ، ففئه " الاغريق " محتويه فى فئه " الناس". وتختلف هاتان العلاقاتان فى خواصهما المنطقيه : فالاحتواء inclusion يمثل علاقه متعديه transitive وجائزه التماثل non-symmetrical بينما العضويه فى فئه class membership هى علاقه غير متعديه intransitive ولا تماثليه asymmetrical(٣).

---

(١) Stebbing, A Modern Elementary Logic, p.88.

(٢) د. نازلى اسماعيل ، مبادىء المنطق الرمزى ، ١٩٨٠ ،ص٨٣

(٣) Stebbing, A Modern Elementary Logic, P.87

فعضويه الفرد فى فئه لا تماثليه ذلك ان " سقراط" (فى المثال السابق) عضو فى فئه " الاغريق " لكن فئة الاغريق ليست عضوا فى الفرد " سقراط " . فكل الافراد اعضاء للفئات لكن لا تكون الفئه عضوا فى فرد[1] . اى ان العلاقه بين الفرد والفئه علاقه ذات اتجاه واحد ولا ترتد من طرف النهايه الى طرف البدايه .

كما ان عضويه الفرد فى فئه ليست متعديه لانه لا يمكن القول انه اذا كان " سقراط انسان " وكان "الانسان حيوان " اذا " سقراط حيوان" لان العلاقه فى القضيه الاولى تختلف عن العلاقه فى القضيه الثانيه . فالاولى علاقه بين فرد وفئه والثانيه بين فئتين .

وعلى ذلك فعضويه الفرد فى فئه يمكن التعبير عنها بقضايا مفرده فقط .

وبيانو هو اول من أوضح الفارق بين علاقه الفرد بالفئه وعلاقه الفئه بالفئه . كما انه اول من وضع الرمز $\in$[2][3] للتعبير عن انتماء الفرد لفئه . فاذا افترضنا ان " س" ترمز لسقراط وان " أ " ترمز لفئه الاغريق فان الصياغه الرمزيه لها تكون على النحو الاتى :

$$س \in أ$$

وتعنى ان " س" عضو فى " أ "

ويمكن ان يعبر عن علاقه العضويه بالشكل التالى :

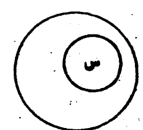
---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٢) يلاحظ ان $\in$ هى الحرف اليونانى epsilon .

(٣) رسل ، اصول الرياضيات ، ص ٥٣

الفئه أ



شكل (٢)

واذا كانت العضويه تكون بين فرد وفئه فإن علاقه الاحتواء تكون بين فئتين . فمثلا اذا كان لدينا فئتين وهما فئه القطط وفئه الحيوانات فانهما ترتبطان بعلاقه الاحتواء . حيث تكون فئة القطط محتويه باكملها فى فئه الحيوانات ، اى ان كل عضو فى فئه القطط هو عضو فى فئه الحيوانات . كما ان فئه القطط تمثل فئه فرعيه sub-class لفئه الحيوانات فاذا كانت فئه القطط هى الفئه " أ " وفئه الحيوانات هى الفئه " ب " فان الفئه " أ " تكون فئه فرعيه للفئه " ب " ، كما ان كل عضو فى " أ " هو عضو فى " ب " . ويعبر عن علاقه الاحتواء فى ضوء علاقه العضويه بالفئه بالصياغه الرمزيه التاليه :

(س) : (س ∈ أ) ⊂ (س ∈ ب)

وتقرأ هكذا : بالنسبه لكل س اذا كانت س عضوا فى " أ " فانه يلزم ان تكون عضوا فى " ب " .

ولكن الصياغه السابقه تعتبر تعبيرا معقدا عن العلاقه البسيطه بين الفئتين " أ " ، " ب " . لذلك يكون من الضرورى استخدام رمزا يعبر عن العلاقه المباشره بين " أ " ، " ب " ويكون التعبير به مكافئا للتعبير فى ضوء علاقه العضويه . والرمز المعتاد استخدامه هو " ⊂ " وهو العلامه الرياضيه " اصغر من "(١). ولقد استخدم على اساس الاعتقاد بأن الفئه

(١) Langer, An Introduction to Symbolic Logic, p. 134.

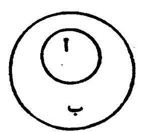
المحتواه يجب ان تكون اقل من الفئه المحتويه[1]. ولكـــن الحقيقه ان ذلك ليس هو الوضع دائما طالما انه يمكن ان يوجد فئات متساويه ويحتوى كل منها الاخرى كما سنرى عند تنـــاول الهويه بين الفئات . الا اننا سنتبع المعتاد ونستخدم الرمـــز " $\subset$ " ليرمز الى " محتويه فى " ، وعلى ذلك يمكن التعبيـــر رمزيا عن احتواء الفئه " ب " للفئه " أ " على النحو الاتى:

أ $\subset$ ب

وتقرأ " الفئه أ محتويه فى الفئه ب " . وهو مـــا يكافىء التعبير السابق :

(س) : (س $\in$ أ) $\supset$ (س $\in$ ب)

ويعبر الشكل التالى عن علاقه الاحتواء بين الفئتيـــن أ ، ب



شكل (٣)

ولعلاقه الاحتواء عدة نتائج وهى :

١- يلاحظ ان كل فئه تكون محتويه فى نفسها او تمثل فئـــه فرعيه لنفسها . ويعبر عن احتواء الفئه لنفسهـــا او

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

كونها فئه فرعيه لنفسها بالصياغه الرمزيه التاليه :

أ > أ

والبرهان على ذلك انه اذا كانت أ هي فئه ما فإن اي عنصر في " أ " يكون عنصرا في " أ " وهذا هو تعريف الاحتواء اذن فإن أ < أ (١).

٢ – تكون الفئه الفارغه محتويه في كل فئه (٢). ذلك ان الفئه الفارغه لا تحتوى أى عنصر وهذا ما يجعلها فئه فرعيه لكل فئه . وعلى ذلك يكون من الصحيح :

صفر < أ

على اعتبار ان " أ " تمثل اى فئه ايا كانت .

٣ – ان علاقة الاحتواء علاقه متعديه . اى اذا كانت أ ،ب ، ج تمثل فئات وكانت " أ < ب " ، " ب < ج " ، اذن " أ < ج " .

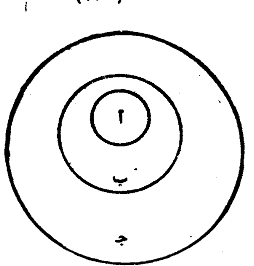
والبرهان على ذلك انه طالما ان " أ < ب " فان كل عنصر في " أ " يكون كذلك عنصرا في " ب " . وطالما ان " ب < ج " فإن كل عنصر في " ب " يكون ايضا عنصرا في " ج " . اذن كل عنصر في " أ " هو عنصر في " ج "، ومن ثم فإن " أ < ج "(٣). ويوضح ذلك الشكل التالى:

---

(١) Gemignani, M. C., Basic Concepts of Mathematics and Logic, Addison, Wesley publishing Co. inc., 1960, p. 69.

(٢) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p. 198.

(٣) Gemignani, M. C., Basic Concepts of Mathematics and Logic, p. 69.



شكـل (٤)

٢ - هوية الفئـات : Identity of Classes

تكون الفئات في هويه اذا كان لها نفس الاعضاء وان اختلفت في التعريفات ، اى اذا اتفقت في الماصدق وان اختلفت في المفهوم . اى ان ما نقرره هو هوية الماصدق مع اختلاف المعنى(١).

فاذا كان ماصدق الفئه " أ " هو ما صدق الفئه " ب " فانه يمكن القول ان تصوراتهما تقدمان تعريفين لفئه واحده(٢).

فإن اتخذنا كمثال فئتى " حيوان مفكر " و " النـــاس" سنجد انهما فى هويه لأن ماصدقات الفئه الاولى هى نفسهـا ماصدقات الفئه الثانيه رغم اختلاف التصورات . فكل عضو فى فئـه " حيوان مفكر " هو عضو فى فئه " الناس " وكذلك فإن كل عضـو فى فئه " الناس " هو عضو فى فئه " حيوان مفكر " . اى ان فئتى " حيوان مفكر " و " الناس " بينهما احتواء متبادل . ويعبـر عن هذا الاحتواء المتبادل رمزيا على النحو الآتى :

$$(س) : (س \in ب) \supset (س \in أ) . (س \in أ) \supset (س \in ب)$$

---

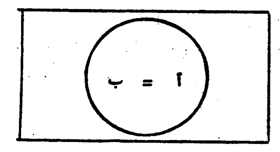
(١) Russell, On Denoting, p. 46.

(٢) Langer, An Introduction to Symbolic Logic, p. 125.

كما يعبر عن الهويه رمزيا بالمعادله الاتيه :

أ = ب

ويمكن التعبير عن علاقه الهويه بالشكل التالى :



أ ⊂ ب . ب ⊂ أ

أ = ب

شكل(٥)

ويوضح الشكل(٥) الهويه بين الفئتين " أ " ، " ب " حيث انهما متطابقتان لذلك لم نرسم سوى دائره واحده . فالدائرتان متطابقتان تماما فلا تظهران الا كدائره واحده مما يوضح ان كل عضو فى " أ " هو عضو فى " ب " وان كل عضو فى " ب " هو عضو فى " أ " .

وبناء على مفهوم الهويه بين الفئات يكون من المجدى عمليا تناول الفئات من ناحية الماصدق عن تناولها من ناحيه المفهوم . والسبب الرئيسى لذلك هو ان التناول الماصدقى للفئات يمنحنا مبدأ بسيطا لعلاقة الفئات كل بالاخرى ، وهو مبدأ العضويه المشتركه [1].

---

(١) المرجع السابق ، ص ١٢٥

اما اذا اعتمدنا على العلاقات بين المفهومات سنجد ان معظم المفهومات منفصله وليس بينها ما هو مشترك . فمثلا لو قلنا " مؤلف الأيام " و " عميد الأدب العربى " سنجد ان الشخص الذى يعرف معنى هذين المفهومين ولا يعرف " طه حسين " لا يمكنه ادراك العلاقه بينهما . بينما لو عرفنا ان العضو بفئة " مؤلف الايام " هو نفسه العضو بفئة " عميد الأدب العربى" أى " طه حسين " سندرك الهويه بين الفئتين رغم اختلاف المفهومين اللذين تعبران عنهما .

ولعلاقه الهوية عدة نتائج اهمها :

١ ـ علاقه الهويه علاقه انعكاسيه أى أن أى فئه فى هويه مع نفسها وهو ما يعبر عنه بالصياغه الرمزيه الاتيه :

أ = أ

٢ ـ وعلاقه الهويه تماثليه أى اذا كانت أ فى هويه مع ب فإن ب تكون فى هويه أ . ويعبر عن ذلك رمزيا على النحو الآتى :

أ = ب . ب = أ

٣ ـ علاقه الهويه علاقة متعديه اى انه اذا كانت أ فى هويه مع ب ، ب فى هويه مع ج فإن أ تكون فى هويه مع ج . وهذا ما تعبر عنه الصياغه الرمزيه التاليه :

أ = ب . ب = ج ∴ ⊂ أ = ج

عوامل الاجراء الخاصه بالفئات :

ان عوامل الاجراء التى سنقوم بتطبيقها على الفئات هى نفسها عوامل الاجراء التى سبق وقمنا بتطبيقها على القضايا

وفيما يلى اهم عوامل الاجراء الخاصه بالفئات :

١ – اجراء النفى :

عندما نكوّن فئه داخل عالم المقال فإن كل فرد فى هذا العالم سيكون اما منتميا لهذه الفئه او خارجها . فاذا كان عالم المقال هو الشعوب المختلفه وكانت الفئه المتكونه هى فئه المصريين فإن كل فرد فى عالم المقال سيكون اما داخلا فى هذه الفئه او خارجا عنها . أى ان كل فرد فى عالم المقال سيكون اما مصريا او لا مصريا . ويعبر عن ذلك رمزيا على النحو الآتى (١) :

(س) (س ∈ أ) ∨ ~ (س ∈ أ)

وتقرأ أنه " بالنسبه لكل س فإن س يكون أ او س ليس أ " .

ومن ثم فهناك فئتان : فئه للداليه " س ∈ أ " وفئه للداليه ~ " س ∈ أ " . وتعتمد الفئه الاخيره على الفئه الاولى فى ماصدقاتها لأن ماصدقاتها هى الماصدقات الخارجه عن " أ " . وهذه الفئه الاخيره هى فئه لا أ والتى رمزنا اليهاكما يلى أ/ .

ويطلق على الفئتين أ ، أ/ فئات تكميليه complementary classes لان كل منهما تحتاج الاخرى لتكمل عالم المقال . أى أن كل منهما مكمله للأخرى.

وبذلك نكون قد استخدمنا اجراء النفى لتعريف الفئة

---

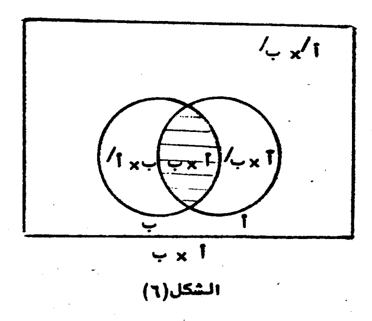
(١) المرجع السابق ، ص ١٤٢

٢ – اجراء الضرب المنطقى : Logical product

اذا افترضنا اننا لدينا الفئتين أ ، ب وكانت الفئه أ هى فئه الطلاب وكانت الفئه ب هى فئه الرياضيين ، فاننا يمكن ان نجد اعضاء مشتركه بين هاتين الفئتين . ذلك انه يمكن ان يوجد من هو طالب ورياضى فى نفس الوقت ويكوّن الاعضاء المشتركه بين الفئتين أ ، ب فئه جديده يطلق عليها الفئه المشتركه Common class او الفئه العطفيه Conjunctive class لانها ناتجه عن عطف فئتين[١]، او عن حاصل ضربهما . ويرمز للفئه الناتجه من العطف او حاصل الضرب كالاتى :

أ × ب

والتى يمكن ان يعبر عنها بالشكل الآتى :[٢]



أ × ب

الشكل(٦)

(١) Richenbach, Elements of Symbolic Logic, p.194

(٢) يطلق على هذا الشكل " شكل فن " نسبه الى عالم المنطق الانجليزى جون فن .

نلاحظ فى الشكل(٦) ان الفئه أ x ب تمثل الجزء المظلل من الشكل ، كما نجد انه قد تكونت اربع فئات فرعيه داخل عالم المقال نتيجه لعطف الفئتين أ ، ب وهذه الفئات هى :

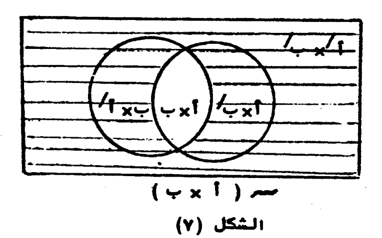
١ - الفئه أ x ب/ وهى الفئه التى تشتمل على كل ما هو أ وليس ب أى على الطلاب اللارياضيين .

٢ - الفئه أ x ب وهى الفئه التى تشتمل على كل ما هو أ ، ب فى نفس الوقت أى فئه الطلاب الرياضيين .

٣ - الفئه ب x أ/ وهى الفئه التى تشتمل على كل ما هو ب وليس أ أى على الرياضيين الغير طلاب .

٤ - الفئه أ/ x ب/ وهى الفئه التى تشتمل على كل ما هو ليس أ وليس ب فى نفس الوقت .

ونلاحظ ان الفئه المكمله للفئه أ x ب هى الفئه ~ (أ x ب) أى الفئه التى لا ينتمى اعضاؤها للفئه أ x ب وعلى ذلك فان الفئه ~ (أ x ب) تشتمل على كل ما هو خارج عن الفئه أ x ب اى انها تشتمل على أ x ب/ ، ب x أ/ ، أ/ x ب/ وهذا ما يوضحه الشكل رقم ٧ .



~ (أ x ب)

الشكل (٧)

ويمثل الجزء المظلل من الشكل رقم(٧) الفئه ~ (أ x ب) أى ان :

~ (أ x ب) = (أ x ب/) + (ب x أ/) + (أ/ x ب/)

وبذلك يتضح الفارق بين الفئه ~ (أ x ب) والفئـــــه أ/ x ب/ .

فالفئه أ/ x ب/ هى الفئه الناتجه من حاصل ضرب الفئتين أ/ ، ب/ المكملتين للفئتين أ ، ب . بينما الفئه ~(أxب) هى الفئه المكلمه للفئه أ x ب .

والداليه المعرّفه للفئه الناتجه من عطف فئتين ، اى الداليه الخاصه بالفئه أ x ب هى[1]:

(س ∈ أ) . (س ∈ ب)

وهى تعنى انه يوجد على الاقل فرد يكون عضوا فـــــى أ وعضوا فى ب . وهو ما يعبر عنه بالقضيه الوجوديه التاليه[2]:

(E س) : (س ∈ أ) . (س ∈ ب)

وما دام كل عضو فى " أ x ب " هو عضو فى " أ " فـإن " أ x ب " تكون فئه فرعيه للفئه أ او محتواه فيهـــــــا . وبالمثل تكون " أ x ب " فئه فرعيه للفئه ب . ومن ثم يمكـن التعبير عن علاقه الاحتواء بينهما رمزيا على النحو الآتى:[3]

(أ x ب ⊂ أ) . (أ x ب ⊂ ب)

ومن الواضح ان الفئه العطفيه تكون اصغر من كل مـــــن الفئتين التى تكونت منهما . ففئه الطلاب الرياضيين اصغر مـن فئه الطلاب وكذلك اصغر من فئه الرياضيين.حقيقه انها احيانـا ما تكون مساويه لاحداهما ولكنها بالتأكيد لن تكون اكبـــــر منها.[4]

---

(١) Langer, An Intro. to Symbolic Logic, p.138.
(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع
(٣) المرجع السابق ، نفس الموضع
(٤) Reichanbach, Elements of Symbolic Logic, p. 194.

٢ - اجراء الجمع المنطقى : Logical Sum

اذا ما أضفنا الفئه أ الى الفئه ب تتكون فئه جديده يكون اعضاؤها ممن ينتمون اما الى الفئه أ أو الفئـــه ب . ولذلك تسمى الفئه الناتجه جمع أ ، ب ، ويعبر عنها بعلامـه الجمع " + " كما فى الجمع الرياضى ومن ثم فالتعبير الرمزى لها هـو :

أ + ب

والداليه المعرفه لهـا هـــى:[1]

(س ∈ أ) ∨ (س ∈ ب)

ومن ثم يمكن تقرير القضيه الكليـــه[2]:

(س) : (س ∈ أ) ∨ (س ∈ ب) :⊂: (س ∈ أ + ب)

وتقرأ : " من الصدق بالنسبه لأى فرد اذا كان اما أ او ب انه يكون عضوا لـ أ + ب " .

كما يطلق على الفئه الناتجه من الجمع المنطقى " الفئـه الفصليه " Disjunctive Class ذلك ان جمع فئتيـــن معا لا يزيل الفارق بينهما بل تظل كل فئه متميزه عن الاخـرى . وهناك نوعين من الفصل: الفصل غير الاستبعادى الذى يفيـــد امكانيه الجمع بين البديلين ، والفصل الاستبعادى الـــذى يستحيل معه الجمع بين البديليـن .

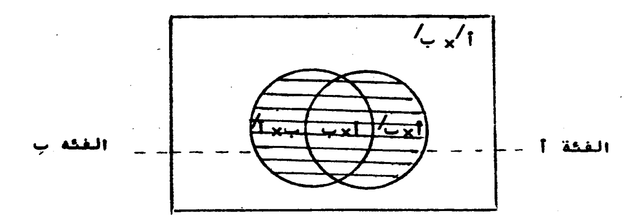
ويمكن توضيح الفصل غير الاستبعادى او كما يطلق عليـــه احيانا الفصل الضعيف بالمثال التالى : اذا اعتبرنا ان الفئه أ هى فئه المتعلمين ، والفئه ب هى فئه الرياضيين وقمنا

---

(١) Langer, An Intro. to Symbolic Logic, p.140.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

بالجمع بينهما تكونت الفئه "أ + ب" . واذا اخترنا جزافا اى عضو من الفئه "أ + ب" سيكون منتميا اما الى فئه الرياضيين او الى فئه المتعلمين او الى فئه المتعلمين الرياضيين لانه من الممكن وجود عضو يكون متعلما ورياضيا فى نفس الوقت وهذا ما يعبر عنه الشكل التالى :



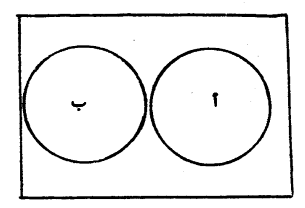
الشكل (٨)

فالفئه أ + ب يمثلها الجزء المظلل من الشكل رقم (٨). وعلى ذلك فإن الفئه أ + ب تكون مساويه للفئات (أ x ب/) أى فئه المتعلمين غير الرياضيين ، و (ب x أ/) اى فئه الرياضيين غير المتعلمين ، والفئه (أ x ب) أى فئه المتعلمين الرياضيين وهذا ما يعبر عنه رمزيا على النحو الآتى :

أ + ب = (أ x ب/) + (ب x أ/) + (أ x ب)

اما الفصل الاستبعادى فيمكن توضيحه بالمثال التالى :

اذا اعتبرنا ان الفئه أ هى فئه البرتقال والفئه ب هى فئه التفاح وجمعنا بينهما فى سله واحده ستتكون بذلك فئه جديده هى الفئه (أ + ب) والتى اذا ما اخترنا منها واحده ستكون اما تفاحه او برتقاله . فنحن هنا امام فئه يستحيل معها الجمع بين البديلين . ويعبر عن ذلك بالشكل الاتى :

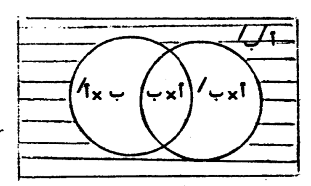


الشكل (٩)

ويوضح الشكل (٩) الفئه (أ + ب) عندما تؤخذ بالمعنى الاستبعادى فلا يكون بين الفئتين أ ،ب اعضاء مشتركه .

وعاده ما يستخدم فى المنطق الرياضى الفصل غير الاستبعادى.ولقد سبق وأوضحنا أن لكل فئه يوجد فئه مكمله لها لكى يكتمل عالم المقال ، ومن ثم فان الفئه " أ + ب " تكون الفئه المكمله لها هى الفئه " ~(أ + ب) " وهى تمثل كلى ما يتبقى من عالم المقال بعد استبعاد "أ + ب " منه .

فاذا كانت الفئه " أ + ب " يمثلها الجزء المظلل فى الشكل رقم(٨) فستكون الفئه المكمله لها وهى الفئه "~(أ + ب)" مساويه للمتبقى من عالم المقال اى مساويه للفئه أ/ x ب/ وهى تمثل الجزء المظلل من الشكل الآتى :



الشكل (١٠)

الفئه ~ (أ + ب)

ومن ثم فإن : -

$$\sim(أ + ب) = أ' \times ب'$$

ونلاحظ انه اذا كانت الفئه العطفيه اصغر من كل من الفئتين التى تكونت منهما ، فان الفئه الفصليه تكون اكبر من أى من الفئتين على حده وفقط فى احوال استثنائيه تكون مساويه لاحداها ولكنها لا تكون اصغر منها(١). فمثلا لو كانت الفئه " أ + ب " هى فئه " الطلبه او الرياضيين" فانها تكون اكبر من " فئه الطلبه " بمفردها وايضا تكون اكبر من فئه الرياضيين بمفردها .

قضايا الفئات :

يتضح لنا - مما سبق - انه باتخاذ عوامل الاجراء(مثل الجمع والضرب) ازاء الفئات يكون الناتج فئات ايضا . فبجمع الفئتين أ ، ب مثلا يكون الناتج هو الفئه (أ + ب) . كما انه بعطف الفئتين أ ، ب يكون الناتج هو الفئه (أ x ب) . ولكن يمكن تكوين قضايا اذا ما استخدمنا علاقات العضويه " ∈ " والهويه " = " الى جانب الاجراءات .

فاذا ما اثبتنا الهويه بين الفئتين أ ، ب يكون الناتج هو القضيه :

$$أ = ب$$

وكذلك اذا ما اثبتنا عضويه الفرد " س" فى الفئه " أ " يكون الناتج القضيه :

$$س \in أ$$

(١) Reichenbach, Elements of Symbolic Logic, p. 195.

ويمكن تصنيف القضايا التى من المستطاع صياغتها رمزيـــا فى حساب الفئات كما يلى :

١ – **من حيث التركيب :** Complexity

وعادة ما تصنف القضايا من حيث التركيب الى قضايـــا بسيطة Simple ومركبه Compound وعطفيه conjunctive

أ) **القضية البسيطة :**

هى القضيه التى لا تحتوى الا على فئه مفرده فقط(١). ومن امثلتها :

أ = صفر

س ∈ أ

أ ≠ صفر حيث ان العلامه " ≠ " تعنى عدم المساواه .

ب) **القضيه المركبه :**

هى القضيه التى تحتوى على حاصل ضرب او جمع عدة فئات(٢) مثـل :

أ × ب = صفر

س ∈ أ × ب

س ∈ أ × ب

أ + ب ≠ صفـر

جـ) **القضيه العطفيـه :**

وهى تلك القضيه التى تحتوى على اكثر من قضيه بسيطـه

---

(١) Schipper, E. & Schuh, E., A First Course in Modern Logic, Holt Rinehart and Winston Inc., 1959, p. 282.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

او مركبه [1]. وعلينا ان ناخذ فى الاعتبار الفارق بين القضيه العطفيه والفئه العطفيه حيث ان القضيه العطفيه تربط بين قضيتين او اكثر وليس بين فئتين . وسوف نستخدم النقطه " . " للدلاله على العطف مثلما وسبق ان استخدمناها فى حساب القضايا.

ومن امثله القضايا العطفيه ما يلى :

أ × ب = صفر . أ ≠ صفر

س ∈ أ . ب = صفر

أ × ب َ = صفر . أ = ج

وهذا يعنى ان كلا القضيتين المعطوفتين صادقتان معا .

٢ ـ من حيث الكم: Quantity

وعادة ما تصنف القضايا من حيث الكم الى قضايا كليه universal ،وقضايا جزئيه particular وقضايا مفرده singular .

أ) القضيه الكليه :

القضيه الكليه ـ فى حساب الفئات ـ ان هى الا قضيه تقرر ان فئه ما تكون فى هويه مع الفئه الصفريه أى انها فئه فارغه فالكليه تعنى ان التعميم يكون خاصا بفئه ما خاليه تماما من العضويه [2]. فالقضيه البسيطه التاليه :

أ = صفر

وكذلك القضيه المركبه التاليه :

أ × ب = صفر

---

(١) المرجع السابق ، ص٢٨٣

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

كلاهما تثبت شيئا ما خاصا بالفئه ككل ومن ثم فانها تكون كليه فى الكم . اى ان القضيه الكليه تقرر شيئا ما للفئـــــه ككل بغض النظر عن وجود ماصدقات لها .

ب) القضيه الجزئيه :

وعلى عكس القضيه الكليه فإن القضيه الجزئيه تثبت ان فئة ما تحتوى عضوا غير محدد ، اى انها تنفى هويه الفئه مع الفئه الفارغه . وسواء كانت الفئه محتويه على عضـــو واحد او على اكثر من عضو،فان القضيه المؤكده لهذه الحقيقـه تكـــون قضيه جزئيه طالما انها لا تتناول كل اعضــــــاء الفئه(1). فالقضايا الجزئيه التاليه :

أ ≠ صفر

أ x ب ≠ صفر

تؤكد وجود اعضاء فى الفئتين " أ " ، " أ x ب " طالما انهما لا تساويان الفئه الفارغه .

جـ) القضيه الفرديــه :

والقضيه الفرديه تجمع بين خصائص كل من القضايا الكليــه والجزئيه . فمثلا لو قلنا بالقضيه الجزئيه التاليه :

س ∈ أ

فإن ما تؤكده هو ان " س " ككل عضو فى الفئه " أ " ، وان الفئه أ هى فئه ذات اعضاء(2) ولهذا فإن القضيــه المفرده تكون فريده فى نوعها ولا يمكن توحيدها مع أى من القضايا الكليه او الجزئيه.

---

(1) المرجع السابق ، نفس الموضع

(2) المرجع السابق ، نفس الموضع

٣ - من حيث الكيف : Quality

ايا كانت القضيه من حيث التركيب او الكم فانه يمكن التعبير عنها بطريقه موجبه او سالبه . ومع ذلك فإن هذه التفرقه التقليديه فى الكيف تنطبق بصفه رئيسيه على القضايا عندما تصاغ باللغه الجاريه ، ولا تنطبق عليها عند صياغتها رمزيا . فغالبا عند الصياغه الرمزيه لا يؤ خذ فى الاعتبار التفرقه بين القضايا الموجبه والسالبه . ذلك انه طالما ان القضيه رمزيه فانه يمكن اعادة صياغتها باللغه الجاريه إما بالصوره السالبه او الصوره الموجبه وذلك كما سنرى عند تناولنا للقضايا الحمليه التقليديه .

الصياغه الرمزيه للقضايا الحمليه التقليديه :

ان القضايا الحمليه التقليديه هى - كما نعلم - الكليه الموجبه ، الكليه السالبه ، الجزئية الموجبه ، الجزئيه السالبه ولقد سبق وان عبرنا عن هذه القضايا رمزيا بواسطه الداليات وسوف نعبر عنها رمزيا بواسطه الفئات وذلك كما يلى :

١ - القضيه الكليه الموجبه :

وهى التى من المعتاد التعبير عنها فى المنطق التقليدى بالصوره :

كل أ هى ب

وهى تعنى ان الفئه أ محتواه كلها فى الفئه ب .

فلو قلنا " كل انسان فان " فإن ذلك يعنى ان فئة الناس مندرجه كلها فى فئة الفانين . ولقد سبق واوضحنا ان الاحتواء بين فئتين نرمز له بالعلامه " < " وهكذا فان " كل أ هى ب " تكون الصياغه الرمزيه لها هى :

أ < ب

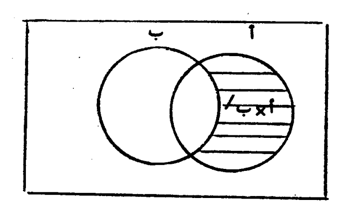
وهذا يعنى عدم وجود أى عضو فى الفئه أ يكون خارجا عن الفئه ب . اى ان الفئه أ x ب/ تكون فئه خاليه او مساويه للصفر . ومن ثم فانه يمكن التعبير عن القضيه الكليه كذلك كما يلى :

أ x ب/ = صفر

اى ان :

أ ⊂ ب = (أ x ب/ = صفر)

وهذا ما يمكن توضيحه بشكل فن الاتى :



شكل(١١)

ويوضح الجزء المظلل الفئه الفارغه أ x ب/ اى ان أ الخارجه عن ب تكون فارغه .

وبذلك فان القضيه الكليه الموجبه تثبت لا وجود لفئه " الانسان اللافان " . ومن ثم فالقضيه الكليه لا وجوديه .

٢ - القضيه الكليه السالبه :

وهى التى يكون التعبير عنها تقليديا بالصوره .

لا أ هى ب

وهى تعنى ان كل ما هو أ ليس ب . فلو قلنا " لا مصرى

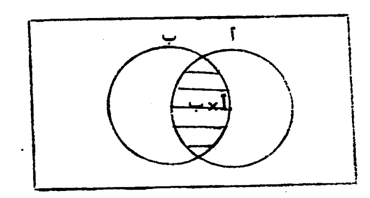
خاشن " فانها تعنى ان فئه المصريين تكون محتواه فى فئه اللاخونه . اى ان الفئه آ تكون متضمنه فى الفئه لا ب . والصياغه الرمزيه لها هى :

آ ⊂ بَ

وهذا يعنى انه لا وجود لحد مشترك بين اعضاء الفئتين آ ، ب اى ان :

آ × ب = صفر

وهذا ما يمكن توضيحه بالشكل التالى :



شكل (١٢)

ويوضح الجزء المظلل من الشكل(١٢) ان الفئه آ × ب فئه فارغه لعدم وجود عضو مشترك بين الفئتين آ ، ب . وعلى ذلك فان :

آ ⊂ بَ = (آ × ب = صفر)

اى ان القضيه الكليه السالبه تثبت لا وجود عضو مشترك بين الفئتين آ ، ب .

وعلى ذلك فإن القضايا الكليه سواء كانت موجبه او سالبه تكون قضايا لا وجوديه . ومن ثم فإن ما تقرره القضايا الكليه هو ان شيئا ما يكون مساويا للصفر .

٣ - **القضيه الجزئيه الموجبه :**

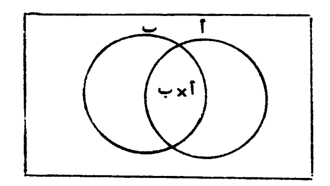
والصوره التقليديه للقضيه الجزئيه الموجبه هى :

بعض أ هى ب

والتى تعنى ان بعض افراد الفئه أ تكون اعضاء فى الفئه ب ، أى ان هناك ما هو مشترك بين الفئتين أ ، ب . فاذا قلنا " بعض الزهور حمراء " فاننا نعنى ان بعض اعضاء فئة الزهور تكون اعضاء فى فئة الاشياء الملونه باللون الاحمر. وبذلك فإن الفئه أ × ب وهى التى تمثل الجزء المشترك بين الفئتين أ ، ب تكون ليست خاليه اى ليست مساويه للصفر. والصياغه الرمزيه لها هى :

أ × ب ≠ صفر

ويمكن التعبير عنها بالشكل التالى :



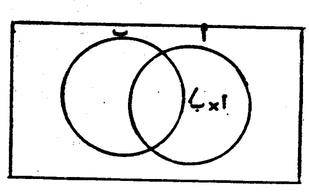
شكل (١٣)

ويوضح شكل(١٣) ان الفئه أ × ب فئه ذات اعضاء لذلك لم نقم بتظليلها لوجود اعضاء بها .

٤ - **القضيه الجزئيه السالبه :**

ويعبر عن القضيه الجزئيه السالبه تقليديا بالصورة الاتية :
" بعض أ ليس ب "

فالقضية " بعض الحيوانات ليست مفترسه " تعنى ان بعض اعضاء فئة الحيوانات تكون اعضاء فى فئة " اللامفترس " وبذلك فإن القضيه الجزئيه السالبه تقرر وجود اعضاء مشتركه بين الفئه أ ونفى الفئه ب . اى ان هناك ما هو مشترك بين الفئتين أ ، ب/ . وبذلك فإن الفئه أ x ب/ ليست فارغه . وهذا ما يعبر عنه الشكل التالى :



شكل (١٤)

وهو يوضح ان الفئه أ x ب/ ليست فارغه لذلك لم نقم بتظليلها .

ومما سبق يتضح ان القضايا الجزئيه قضايا وجوديه لانها تقرر وجود ما هو مشترك بين فئتين . فالقضيه الجزئية الموجبه " بعض أ هى ب " تؤكد وجود عضو واحد على الاقل يكون أ ، ب فى نفس الوقت ، والقضيه الجزئيه السالبه " بعض أ ليس ب " تؤكد وجود عضو واحد على الاقل يكون أ وليس ب فى نفس الوقت .

اهم القوانين الخاصه بحساب الفئات :

قبل ان نقوم بعمليات الاستدلال على الفئات علينا ان نقدم اهم القوانين والقواعد التى طبقا لها تسير عملية الاستدلال. واهم القوانين هى [1]:

---

(١) بخصوص هذه القوانين يمكن مراجعه :
المرجع السابق ، من ص ٢٧٨ – ص ٢٨٠ . وكذلك كتاب :
Cohen & Nagel, An Introduction to Logic, P.p., 123, 124.

١ – **قانون النفى المزدوج :** Law of Double Negation

ان اى فئة تكون فى هوية مع الفئة المكملة للفئة المكملة لها . اى اذا كانت الفئة المكملة للفئة أ هى الفئة لا أ . فان الفئة المكملة للفئة لا أ هى الفئة لا لا أ اى الفئة أ لان نفى النفى اثبات . واذا مارمزنا للفئة لا لا أ بالرمز أ// اى بوضع علامتى نفى فوق أ فان الصياغة الرمزية لهذا القانون هى :

أ = أ//

٢ – **قانون الهوية :** Law of Identity

بالنسبة لكل فئة فانها تكون محتواة فى ذاتها . وهو ما يعبر عنه رمزيا كما يلى :

أ ⊂ أ

أو

أ = أ

٣ – **قانون التناقض :** Law of Contradiction

لا يمكن ان يوجد اعضاء مشتركة بين الفئتين أ ، لا أ . اى ان الفئة أ x أ/ هى فئة فارغة والصياغة الرمزية على النحو الآتى :

أ x أ/ = صفر

٤ – **قانون الوسط المرفوع :** Law of Excluded Middle

يكون كل شىء فى عالم المقال اما عضوا فى أ او عضوا فى لا أ ولا يمكن ان يكون عضوا فى كليهما وهو ما يعبر عنه

رمزيا على النحو الآتى :

أ + أ/ = ١

ويلاحظ ان العلامه " + " تؤخذ هنا بالمعنى الاستبعادى.

٥ - قوانين التبادل : Laws of Commutation

ان ترتيب وضع متغيرات الفئات الحادثه فى حاصل الضرب المنطقى او حاصل الجمع المنطقى لا يؤثر فى معناها أى أن :

أ x ب = ب x أ
أ + ب = ب + أ

ويمكن توضيح ذلك بانه اذا قلنا فئة " المصريين الادباء" تكون هى نفسها فئة " الادباء المصريين " . واذا قلنا فئه الافراد الذين يكونوا اما " موسيقيين او أدباء " تكون هى نفسها فئه الافراد الذين يكونوا إما " ادباء او موسيقيين " .

٦ - قوانين التجميع : Laws of Association

ويرتكز هذا القانون على ان ضرب وجمع الفئات يكون تجميعى . بمعنى ان تجميع اعضاء الفئات العطفية او الفصلية لا يغير المعنى . وهذا ما يعبر عنه بالصياغه الرمزيه التاليه :

أولا: أ x (ب x جـ) = (ب x (أ x جـ)
ثانيا: أ + (ب + جـ) = (ب + (أ + جـ)

بالنسبه لأولا فان حاصل ضرب الفئه أ ، و الفئه (ب x جـ) يكون مساويا لحاصل ضرب الفئه ب ، والفئه (أ x جـ) . وبالنسبه لثانيا فان حاصل جمع الفئه أ والفئه (ب + جـ) يكون هو نفسه حاصل جمع الفئه ب والفئه (أ+جـ) .

ومن ثم فان قوانين التجميع تعنى ، فى الحقيقه ، ان الاقواس يمكن حذفها من الفئات التى تكون عطفيه او فصليه .

٧ - قوانين الاستغراق : Laws of Distribution

وبواسطه قوانين الاستغراق يمكن تحويل القضايا من عطفيه الى فصليه والعكس وذلك كما يلى :

أولا: أ × (ب + جـ) = (أ × ب) + (أ × جـ)

ثانيا: أ + (ب × جـ) = (أ + ب) × (أ + جـ)

ويلاحظ ان القانون الاول الذى يجعل حاصل الضرب أشمل من حاصل الجمع هو قانون من قوانين الجبر ، بينما القانون الثانى الذى يجعل حاصل الجمع اشمل من حاصل الضرب لا يتحقق فى الرياضيات .

٨ - قوانين تحصيل الحاصل : Laws of Tautology

ويعبر عنها رمزيا كما يلى :

أولا: أ × أ = أ

ثانيا: أ + أ = أ

بالنسبه للقانون الاول نجد اننا لو اخترنا من بين اعضاء الفئه أ من يتصف بكونه أ لحصلنا على جميع اعضاء الفئه أ .

وبالنسبه للقانون الثانى نجد اننا لو اخترنا من الفئه (أ + أ) من يتصف بكونه اما أ او أ ستكون النتيجه هى الفئه أ نفسها .

ويلاحظ ان هذين القانونين يمثلان اختلافا جذريا مع قوانين الرياضيا .

٩ – قوانين الاستنفاد :[١] Laws of Absorption

أولا: أ + (أ × ب) = أ

ثانيا: أ × (أ + ب) = أ

١٠ – قوانين التبسيط : Laws of Simplification

أولا: أ × ب < أ

ثانيا: أ < أ + ب

بالنسبه للقانون الاول فان الفئه أ × ب هى جزء من الفئه أ ومن ثم فانها تكون مندرجه او محتواه فيها.

وبالنسبة للقانون الثانى فان الفئه أ هى جزء من الفئه أ + ب ومن ثم فانها تكون مندرجه او محتواه فيها .

وبناء على هذين القانونين فان الفئه الصفريه تكون محتواه فى كل فئه ، وان كل فئه تكون مندرجه فى الفئة الشامله اى ان (أ < ١) ،

١١ – قوانين التركيب : Laws of Composition

أولا: [(أ < ب) . (جـ < د)] ⊂ [أ × جـ < ب × د]

ثانيا: [(أ < ب) . (جـ < د)] ⊂ [(أ + جـ) < (ب + د)] .

ويلاحظ اننا استخدمنا الرمز " ⊂ " المعبر عن اللزوم بين القضايا ، وكذلك النقطه " . " التى تعبر عن العطف بين القضايا .

ويقرأ القانون الاول كما يلى :

---

(١) للبرهنه على هذين القانونين راجع كتاب :
د. عزمى اسلام ، أسس المنطق الرمزى ، ص ٦٢ ، ص ٦٣

" اذا كانت الفئه أ متضمنه فى الفئه ب ، والفئه ج متضمنه فى الفئه د فانه يلزم عن ذلك ان تكون الفئه أ x ج متضمنه فى الفئه ب x د " ٠

ويقرأ القانون الثانى كما يلى :

" اذا كانت الفئه أ متضمنه فى الفئه ب ، وكانت الفئه ج متضمنه فى الفئه د ، فانه يلزم عن ذلك ان تكون الفئه (أ + ج) متضمنه فى الفئه (ب + د) ٠

١٢ – قانون القياس : Law of Syllogism

والتعبير عنه هـو :

[(أ < ب) ٠ (ب < ج)] ⊂ [(أ < ج)]

اى اذا كانت الفئه أ متضمنه فى الفئه ب ، والفئه ب متضمنه فى الفئه ج ، فانه يلزم عن ذلك ان الفئه أ تكون متضمنه فى الفئه ج ٠ وهذا ما يوضح ان علاقه التضمن او الاحتواء بين الفئات هى علاقه متعديه ٠

١٣ – قانونا دمورجن : De Morgan's Laws

وهمـا :

أولا: ~ (أ x ب) = أ/ + ب/

ثانيا: ~ (أ + ب) = أ/ x ب/

ويعبر القانون الاول عن ان الفئه المكمله لحاصل ضرب فئتين تكون مساويه او فى هويه مع الفئه الناتجه عن حاصل جمع الفئتين المكملتين للفئتين الاصليتين ٠

ويعبر القانون الثانى عن ان الفئه المكمله لحاصل جمع فئتين تكون فى هويه مع الفئه الناتجه من حاصل ضرب الفئتين المكملتين للفئتين الاصليتين ٠

١٤ – قاعده الاستبدال : Rule of Replacement

يمكن ابدال اى متغير فئه بأى متغير آخر يكون فى هويـــه معه بدون ان يغير ذلك صحة او عدم صحة او صدق او كذب اى قضيه . فمثلا طبقا لقانون النفى المزدوج وقاعدة الابدال فإن القضيـــه " س ∈ أ " اذا كانت صادقه فإن القضيه " س ∈ أ// " تكـــون صادقة كذلك ، أى اننا وضعنا " أ// " حان " أ ".

الاستدلال :

الاستدلال ان هو الا اشتقاق نتائج من مقدمات طبقا لقواعـــد بعينها . ويكون الاستدلال صحيحا عندما تلزم فيه النتيجه لزومـــا ضروريا عن المقدمات .

وينقسم الاستدلال بصفه عامه الى نوعين : بسيط و مركـــب . والاستدلالات البسيطه هى تلك التى لا تحتاج فى استنتاجها الى اكثر من قضيه هى المقدمه ، كما ان النتيجه تكون قضيه واحده كذلـك . أما الاستدلالات المركبه فهى التى تحتوى فيها المقدمات او النتائج على اكثر من قضيه واحده .

١) الاستدلالات البسيـ[illegible] :

سوف نتناول اهم انواع الاستدلالات البسيطه وذلك كما يلى :

أولا: الاستدلالات البسيطة القائمه على النفى المزدوج :

ان الاستدلال القائم على قانون النفى المزدوج أ = أ// هو ما كان يطلق عليه فى المنطق التقليدى نقض المحمـــــــول obversion وهو الذى يسمح لنا بالتعبير عن القضايا الموجبه فى صورة سالبه والعكس صحيح .

واذا كان المنطق التقليدى قد اقتصر على القضايا الاربـــع

الا ان المنطق الرياضى قد ابان عن امكانية نقض القضايا الفرديه كذلك . ويراعى عند القيام بنقض المحمول القيام بالخطوات الاتيه [١]:

١) بقاء كم القضيه كما هو دون تغيره .
٢) تغير كيف القضيه .
٣) تغيير كيف الحد الثانى (المحمول) أى ان حد الفئه يستبدل بحد الفئه المكمله لها .

وسوف نقوم بتطبيق هذه القواعد على القضايا كما يلى :

نقض القضايا الكليه :

١ – الكليه الموجبه :

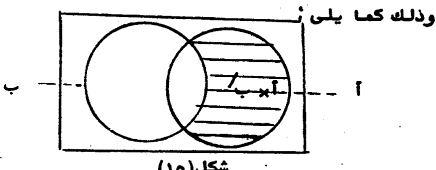
الكليه الموجبه وهى " كل أ هى ب " تكون القضيه المناقضه لها هى " لا أ هى ب/" – أى أن :

كل أ هى ب ≡ لا أ هى ب/

والتى تمثلها الصياغه الرمزيه التاليه :

(أ x ب/ = صفر) ≡ (أ x ب/ = صفر)

ويمكن التحقق من صحة هذا التكافؤ بواسطة شكل فن ايضا وذلك كما يلى :

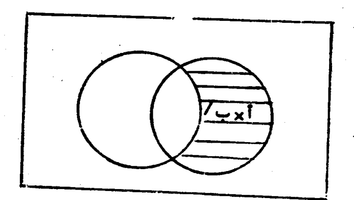


شكل(١٥)

كل أ هى ب = (أ x ب/ = صفر)

---

(١) Schipper & Shuh, A First Course in Modern Logic, p. 316.



شكل(١٦)

لا أ هى ب/ = (أ × ب/ = صفر)

من الواضح التطابق بين الشكلين ١٥ ، ١٦ مما يؤكد صحه قضيه التكافؤ :

(أ × ب/ = صفر) ≡ (أ × ب/ = صفر)

وبما ان القضيتين متكافئتان فانه يمكن استنتاج صدق او كذب احداهما بناء على صدق او كذب الاخرى ٠

٢ - **الكليه السالبه :**

والكليه السالبة هى " لا أ هى ب " ويكون نقض المحمول لها هو " كل أ هى ب/ " ومن ثم فإن :

لا أ هى ب ≡ كل أ هى ب/

والتى يمكن التعبير عنها بالصياغه الرمزيه التاليه :

(أ × ب = صفر) ≡ (أ × ب// = صفر)

ومن الواضح صحة هذا التكافؤ حيث ان ب// = ب بناء على قانون النفى المزدوج ٠

نقض القضايا الجزئيه :

١ - **الجزئيه الموجبه :**

وهى " بعض أ هى ب " وعندما نطبق قواعد نقض المحمول

تصبح " بعض أ ليس ب/ " .

أى ان :

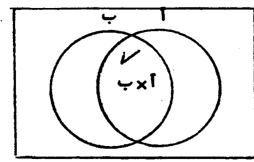
بعض أ هى ب ≡ بعض أ ليس ب/

والصياغه الرمزيه لها على النحو الآتـــى :

(أ x ب ≠ صفر) ≡ (أ x ب// ≠ صفـر)

وهذا التكافؤ صحيح لأن ب// = ب طبقا لقانون النفـــى المزدوج .

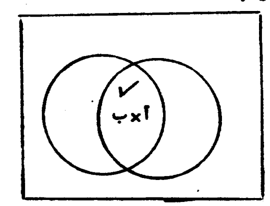
اما اذا اردنا التثبت من صحته بواسطه شكل فن يمكن رســم الشكل التالى :



بعض أ هى ب = (أ x ب ≠ صفر)

شكــل(١٧)

وايضا الشكل :



بعض أ ليس ب/ = (أ x ب// ≠ صفر)

شكل(١٨)

٢ - **الجزئيه السالبه :**

وهي بعض أ ليس ب " وبالنقض تصبح " بعض أ هي ب/ "
ومن ثم فإن :
بعض أ ليس ب ≡ بعض أ هو ب/
والصياغه الرمزيه لها هي :
(أ × ب/ ≠ صفر) ≡ (أ × ب/ ≠ صفر)
ومن الواضح صحه التكافؤ .

نقض القضايا الفرديه : (١)

١ - **القضيه الفرديه المثبته :**

وهي القضيه " س هو أ " والقضيه المناقضه لها تكـــون " س ليس أ/" اذن :
س هي أ ≡ س ليست أ/
وهذا ما يعبر عنه رمزيا على النحو الاتى :
(س ∈ أ) ≡ (س ∉ أ//)

٢ - **القضيه المفرده السالبه :**

وهي " س ليست أ " وبنقض المحمول تصبح " س هي أ/ "
اذن :
س ليست أ ≡ س هي أ/
والصياغه الرمزيه لها :
س ∉ أ/ ≡ س ∈ أ/

---

(١) المرجع السابق ، ص ٣١٧

ثانيا: الاستدلالات البسيطه القائمه على العكس: Conversion

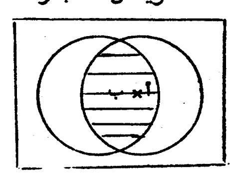
ان العكس ـ كما هو معروف فى المنطق التقليدى ـ نوع من انواع الاستدلال المباشر يتغير فيه جزءا القضيه كل مكان الاخر أى انه يتم تحويل الموضوع الى محمول والمحمول الى موضوع بحيث يبقى الصدق على حاله دون تغير . فعندما تعكس القضيه فأن القضيه الناتجه تكون صادقه اذا كانت القضيه الاصليه صادقه. والقضايا التى يمكن ان ينطبق عليها العكس فى المنطق القديم هى الكليه السالبه وتصبح بعد العكس كليه سالبه ، والجزئيه الموجبه وتتحول الى جزئيه موجبه ، والكليه الموجبه وتتحول الى جزئيه موجبه ، اما الجزئيه السالبه فلا عكس لها .

اما فى المنطق الرمزى فان العكس لا يكون الا لقضيتين فقط وهما الكليه السالبه والجزئيه الموجبه ، وبالتطبيق على القضايا الاربع التقليديه سيتضح ذلك كما يلى :

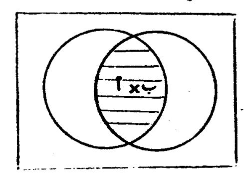
١ – الكليه السالبه :

وهى " لا أ هى ب " وصياغتها الرمزيه هى : أ x ب = صفر
وتعكس الى " لا ب هى أ " وصياغتها الرمزيه هى: ب x أ = صفر
اذن (أ x ب = صفر) ≡ (ب x أ = صفر) طبقا لقانون تبادل الحدود .

ويمكن اختبار صحه هذا الاستدلال بواسطه شكل فن التالى:



لا أ هى ب = (أxب = صفر)
شكل(١٩)



لا ب هى أ = (ب x أ = صفر)
شكل(٢٠)

ويوضح الشكلان(١٩) ،(٢٠) صحة التكافؤ :

(أ x ب = صفر) ≡ (ب x أ = صفر)

٢ - **الجزئيه الموجبه :**

وهى (بعض أ هى ب) والتعبير الرمزى لها : أxب ≠ صفر

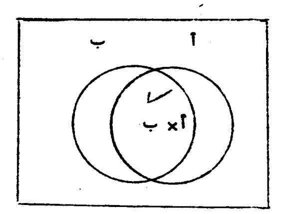
وتعكس الى :

(بعض ب هى أ والتعبير الرمزى لها : ب x أ ≠ صفر

وطبقا لقانون تبادل الحدود تكون :

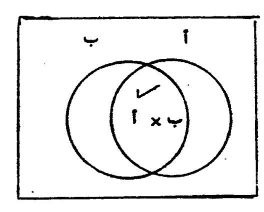
(أ x ب ≠ صفر) ≡ (ب x أ ≠ صفر)

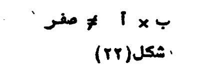
ويتضح صحتها بواسطة شكل فن التالى :



أ x ب ≠ صفر

شكل(٢١)



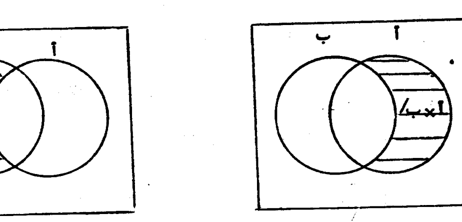


ب x أ ≠ صفر

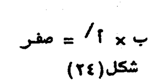
شكل(٢٢)

٣ - **الكليه الموجبه :**

وهى " كل أ هى ب " وصياغتها الرمزيه أ x ب/ = صفر واذا ما عكست ستكون " كل ب هى أ " وصياغتها الرمزيه ب x أ/ = صفر . ولكن هذا الاستدلال خاطىء لان القضيه الاصليه لا تكافئ القضيه الناتجه ويمكن توضيح ذلك بشكل فن الاتى : -



أ × ب/ = صفر
شكل(٢٣)

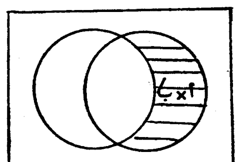


ب × أ/ = صفر
شكل(٢٤)

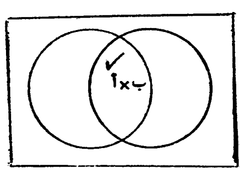
وبذلك يوضح الشكلان ان كلا من القضيتين مختلفتين ولا يمكن استدلال صدق احداهما بناء على صدق الأخرى وعلينا ايضا اختبار صحة ما يدعيه المنطق التقليدى من ان الكليه الموجبه " كل أ هى ب " تعكس الى جزئيه موجبه وهى " بعض ب هى أ " وذلك بالتعبير الرمزى لهما ،

والصياغه الرمزيه للكليه الموجبه هى أ × ب/ = صفر
والصياغه الرمزيه للجزئيه الموجبه هى ب × أ ≠ صفر

ومن الواضح انهما غير متكافئين ويظهر ذلك فى شكلين الاتى :



أ × ب/ = صفر
شكل(٢٥)



ب × أ ≠ صفر
شكل(٢٦)

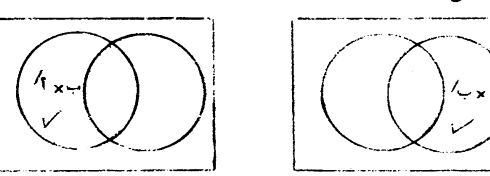
ومن الواضح اختلاف الشكلين المعبرين عن القضيتين · ومن ثم لا يمكن عكس الكليه الموجبه الى جزئيه موجبه لانه لا يمكن استنتاج الوجود من اللاوجود ·

٤ - **الجزئيه السالبه :**

وهى " بعض أ ليس ب " وصياغتها الرمزيه أ × ب/ ≠ صفر واذا عكست ستكون " بعض ب ليس أ " وصياغتها الرمزيه :

ب × أ/ ≠ صفر

ومن الواضح انهما غير متكافئتين ويثبت ذلك شكل فن الاتى



أ × ب/ ≠ صفر
شكل(٢٧)

ب × أ/ ≠ صفر
شكل(٢٨)

وبذلك فإن الجزئيه السالبه وكذلك الكليه الموجبه لا عكس لهما · والاستدلال بالعكس يكون صحيحا فى حالتين فقط هما الكليه السالبه والجزئيه الموجبه ·

ثالثا : الاستدلال بواسطة عكس النقيض : Contraposition

ان عكس النقيض الموافق هو تحويل قضيه الى اخرى موضوعها نقيض محمول القضيه الاصليه ومحمولها نقيض موضوع الاصل · وعند ارسطو عكس النقيض الموافق فى المنطق التقليدى تتبع ثلاث خطوات وهى نقض المحمول للقضيه ثم العكس ثم النقض مره اخرى · بينما

فى المنطق الرياضى نقوم باجراء الخطوتين الاتيتين :

١) تغيير مواقع حدود القضايا فيوضع كل حد مكان الآخر .

٢) ونستبدل بكل فئه الفئه المكمله لها .

ويلاحظ ان القضايا التى يمكن ان ينطبق عليها عكس النقيض فى المنطق التقليدى هى الكليه الموجبه ، والكليه السالبه والجزئيه السالبه ـ ولكن المنطق الرياضى بالتحليل الرمزى للقضايا أظهر ان القضايا التى يمكن ان ينطبق عليها عكس النقيض هى القضايا الكليه الموجبه والجزئيه السالبه فقط .
ويمكن توضيح ذلك بالتطبيق على القضايا الاربع وذلك كما يلى :

١ ـ الكليه الموجبه :

وهى " كل أ هى ب " وبتغير مواقع الحدود تصبح " كل ب هى أ " ، ثم بتطبيق الخطوه الثانيه وهى استبدال بكل فئه الفئه المكمله لها تصبح " كل ب/ هى أ/" . أى ان :

كل أ هى ب ≡ كل ب/ هى أ/

ويمكن التعبير عنها رمزيا كما يلى :

(أ x ب/ = صفر) ≡ (ب/ x أ// = صفر)

ويمكن اختبار صحة هذا الاستدلال رمزيا باتباع الخطوات التاليه :

١) ∵ (كل أ هى ب) = (أ x ب/ = صفر) طبقا للصياغه الرمزيه

∵ (أ x ب/ = صفر) ≡ (ب/ x أ = صفر) طبقا لقانون تبادل الحدود

∵ (ب/ x أ = صفر) ≡ (ب/ x أ// = صفر) طبقا لقانون النفى المزدوج

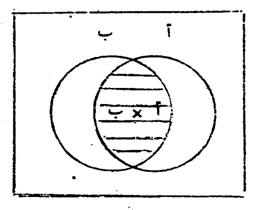
∴ (أ x ب/ = صفر) ≡ (ب/ x أ// = صفر) وهو المطلوب .

٢ – الكليه السالبه :

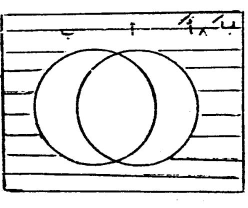
وهى " لا أ هى ب " وبتطبيق الخطوه الأولى وهى تغيير مواضع الحدود تصبح " لا ب هى أ " . وبتطبيق الخطوه الثانيه تصبح " لا ب/ هى أ/ " . ومن الواضح ان هذه القضية الاخيرة لا تكافىء القضية الاصليه وذلك يتضح من الصياغه الرمزيه لكل منهما :

(لا أ هى ب) = (أ × ب = صفر)
(لا ب/ هى أ/) = (ب/ × أ/ = صفر)

كما يمكن اختبار عدم صحة الاستدلال بواسطه عكس النقيض للكليه السالبه بواسطه شكل فن وذلك كما يلى :



أ × ب = صفر
شكل(٢٩)



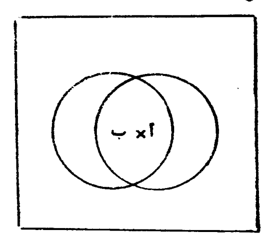
ب/ × أ/ = صفر
شكل(٣٠)

٣ – الجزئيه الموجبه :

وهى " بعض أ هى ب " وبتطبيق الخطوه الاولى تصبح " بعض ب هى أ " . وبتطبيق الخطوه الثانيه تصبح " بعض ب/ هى أ/ ". ولكن القضيه الناتجه لا تكافىء القضيه الاصليه . ويمكن توضيح ذلك بالصياغه الرمزيه لكل منهما .

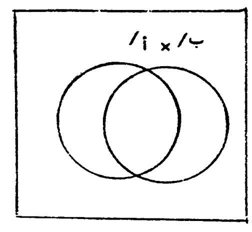
(بعض أ هى ب) = (أ × ب ≠ صفر)
(بعض ب/ هى أ/) = (ب/ × أ/ ≠ صفر)

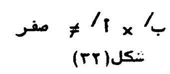
وايضا باستخدام شكل فن يتضح عدم صحة هذا الاستـــــدلال وذلك كما يلى :



أ x ب ≠ صفر

شكل (٣١)





ب/ x أ/ ≠ صفر

شكل (٣٢)

٤ – **الجزئيه السالبه :**

وهى " بعض أ ليس ب " بتطبيق الخطوه الاولى تصبـــــح " بعض ب ليس أ " وبتطبيق الخطوه الثانيه تصبح " بعض ب/ ليس أ/ ".

اى ان :

(بعض أ ليس ب) ≡ (بعض ب/ ليس أ/)

ويمكن التعبير عنها رمزيا كما يلى :

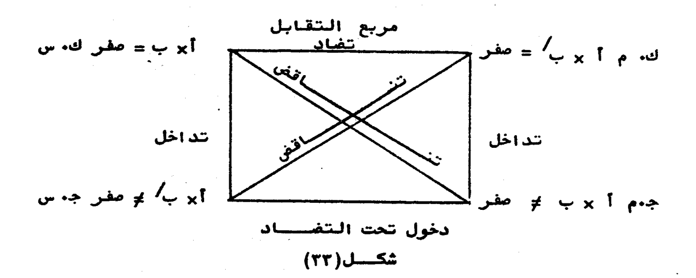
(أ . ب/ ≠ صفر) ≡ (ب/ x أ// ≠ صفر)

ويمكن اختبار صحة هذا الاستدلال رمزيا باتباع الخطـــوات السابق اتباعها مع الكليه الموجبه .

ومما سبق يتضح انه يمكن تطبيق الاستدلال بواسطه عكـــس النقيض على القضايا الكليه الموجبه والجزئيه السالبه فقط.

٢) **الاستدلال بواسطه التقابل :** Opposition

عند الاستدلال بواسطه التقابل قد نستدل صدق احدى القضايا من كذب الأخرى أو كذب احداهما من صدق الاخرى[١]. وتشتمل الاستدلالات بالتقابل على استدلالات بسيطه ومركبه . فيمثل التقابل بالتناقض استدلالا بسيطا وتمثل باقى انواع التقابل(تضاد ، دخول تحت التضاد ، تداخل) استدلالات مركبه ولكنها تمثل نوعا خاصا من الاستدلالات المركبه مختلفا عن الاستدلالات المركبه فى القياس . لذلك تناولنا الاستدلال بواسطه التقابل باعتباره يمثل نوعا بمفرده . ولكى نتبين التحليلات الرمزيه للتقابل علينا ان نرسم مربع التقابل بالصياغه الرمزيه للقضايا الأربع على النحو التالى :



شكل(٣٣)

١) **التناقض :**

يقوم التناقض بين قضيتين تختلفان كيفا وكما . والقضيتان المتناقضتان لا تصدقان معا ولا تكذبان معا .

---

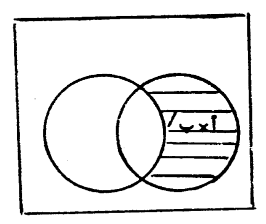
(١) المرجع السابق ، ص ٣٢٤

وبما ان الكليه الموجبه تناقض الجزئيه السالبه فـــان الكليه الموجبه تكافىء القضيه النافيه للجزئيه السالبه . اى اذا كانت (أ x ب/ = صفر) تناقض (أ x ب/ ≠ صفر) اذن:

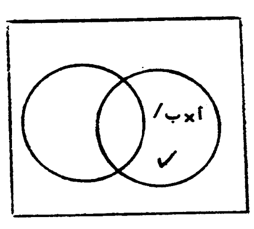
(أ x ب/ = صفر) ≡ ~ (أ x ب/ ≠ صفر)

وتقرأ كما يلى : القول بان أ x ب/ فئه فارغه يكافـــئ القول انه من الكذب ان تكون أ x ب/ ليست فارغه .

ويمثل للتناقض بين الكليه الموجبه والجزئيه السالبـــه بالشكلين التاليين :



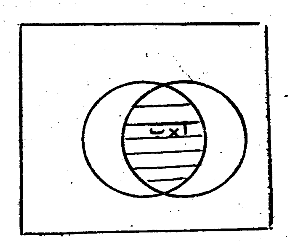
أ x ب/ = صفر
شكل(٣٤)



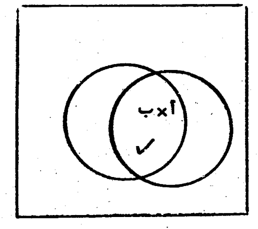
أ x ب/ ≠ صفر
شكل(٣٥)

كما ان القضيه الكليه السالبه تناقض القضيه الجزئيـــه الموجبه ى ان (أ x ب = صفر) تناقض (أ x ب ≠ صفر).

ويمكن التعبير عن التناقض بين الكليه السالبه والجزئيــه الموجبه بالشكلين التاليين :



أ × ب = صفر
شكل(٣٦)



أ × ب ≠ صفر
شكل(٣٧)

ومن ثم فإن :
(أ × ب = صفر) ≡ ~ (أ × ب ≠ صفر)

وبذلك يكون لدينا فى حالة التناقض الاستدلالات الصحيحـــه التاليه :

١) أ × ب/ = صفر : ⊂ : ~ (أ × ب/ ≠ صفر)
وتقرأ : اذا كانت (أ × ب/ = صفر) صادقه فانه يلــــزم عن ذلك ان تكون القضيه (أ × ب/ ≠ صفر) كاذبه .

٢) ~ (أ × ب/ = صفر) : ⊂ : (أ × ب/ ≠ صفر)
وتقرأ اذا كانت القضيه (أ × ب/ = صفر) كاذبه فانـــه يلزم عن ذلك ان القضيه (أ × ب/ ≠ صفر) صادقه .

٣) (أ × ب = صفر) : ⊂ : ~ (أ × ب ≠ صفر)

٤) ~ (أ × ب = صفر) : ⊂ : (أ × ب ≠ صفر)

٥) ~ (أ × ب/ ≠ صفر) : ⊂ : (أ × ب/ = صفر)

٦) (أ × ب/ ≠ صفر) : ⊂ : ~ (أ × ب/ = صفر)

٧) ~ (أ × ب ≠ صفر) : ⊂ : (أ × ب = صفر)

٨) (أ × ب ≠ صفر) :⊃: ~ (أ × ب = صفر)

٢ – التضاد :

يقوم التضاد فى المنطق التقليدى بين قضيتين كليتين مختلفتين فى الكيف اى بين الكليه الموجبه والكليه السالبه. وحكم صدق القضيتين المتضادتين انهما لا يصدقان معا ولكن قد يكذبان معا .

ولكن من وجهة نظر المنطق الرياضى فإن القضيتين الكليتين المختلفتين فى الكم " كل أ هو ب " و " لا أ هى ب " اذا ما فسرتا بالمعنى الفرضى (اللا وجودى) لا يكون بينهما اى نوع من التقابل . فمن الممكن ان يكذبان معا وقد يصدقان معا كذلك طالما ان الفئه أ هى فئه خاليه من الاعضاء . ومن ثم فانه اذا كان الاستدلالان الاتيين :

١) (أ × ب′ = صفر) :⊃: ~ (أ × ب = صفر)

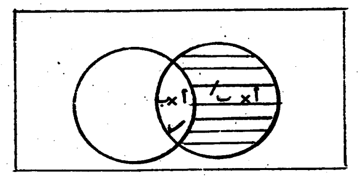
٢) (أ × ب = صفر) :⊃: ~ (أ × ب′ = صفر)

صحيحين من وجهه نظر المنطق التقليدى الا انهما ليسا صحيحين من وجهه نظر المنطق الرياضى . ولكى يمكن الاستدلال بواسطة التضاد علينا ان نثبت وجود اعضاء فى الفئه أ وان نضيف للقضايا الكليه قضايا وجوديه ومن ثم لكى يكون الاستدلالان صحيحين علينا صياغتهما كما يلى :

١) (أ × ب′ = صفر . أ ≠ صفر) :⊃: ~ (أ × ب = صفر)

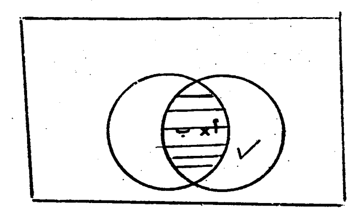
٢) (أ × ب = صفر . أ ≠ صفر) :⊃: ~ (أ × ب′ = صفر)

ويمكن اختبار صحتهما بواسطة شكل فن على النحو الاتى :



أ × ب/ = صفر ٠ أ ≠ صفر

شكل(٣٨)



أ × ب = صفر ٠ أ ≠ صفر

شكل(٣٩)

ويلاحظ ان الاستدلال بواسطة التضاد يصبح فى هذه الحالة من النوع المركب وليس من النوع البسيط بسبب اضافه المقدمة الوجوديه مع المقدمه الاصليه . كما يلاحظ اننا نقوم بالاستدلال بالتضاد من الصدق فقط ، ولا نستطيع الاستدلال من الكذب لاننا لو بدأنا بالكذب لا يمكن الحكم على القضيه الاخرى اما اذا بدأنا بالصدق فان القضية المتضاده تكون كاذبه بالضروره .

٣ — **الدخول تحت التضاد :**

وهو يكون بين القضيتين الجزئيتين المختلفتين كيفاً أى بين الجزئيه الموجبه والجزئيه السالبه . والقضيتان الداخلتان تحت التضاد لا يكذبان معا ولكنهما قد يصدقان معا ، اى ان الحكم بكذب احداهما يستلزم صدق الأخرى . ولكن الحكم بصدق احداهما لا يستلزم صدق او كذب الأخرى.

والقضيتان الجزئيتان المختلفتان فى الكيف مثل " بعض أ هى ب " و " بعض أ ليس ب " هما قضيتان متقابلتان بالدخول تحت التضاد من وجهة نظر المنطق التقليدى . الا انه طبقا لوجهه النظر الحديثه لا تكون هاتان القضيتان داخلتين تحت التضاد ما لم نفترض وجود اعضاء فى الفئه " أ " رغم انهما قضيتان وجوديتان . ومن ثم يكون الاستدلال الصحيح متخذا الصياغه الرمزيه الآتيه :

١) ~ [(أ × ب ≠ صفر) . (أ ≠ صفر)] :⊂: (أ× ب/ ≠ صفر)

٢) ~ [(أ × ب/ ≠ صفر) . (أ ≠ صفر)] :⊂: (أ × ب ≠ صفر)

ويبرر كل من شيبر و شو الاضافه للقضيه (أ ≠ صفر) بانه رغم ان القضيه أ × ب ≠ صفر تفترض وجود اعضاء الا اننا قد انكرنا هذه القضيه الوجوديه[١]. كما ان القول بكذب (أ×ب ≠ صفر) يكون مكافئا بالتناقض لصدق القضيه أ × ب = صفر وبذلك لا يمكن الاستدلال من كذب (أ × ب ≠ صفر) وتكون اضافه القضيه (أ ≠ صفر) ضرورية[٢].

ولكن هناك من يرفض اضافه هذه المقدمه الوجوديه ويرى ان القضيتين الجزئيتين المختلفتين فى الكيف مستقلتان كل

---

(١) المرجع السابق ، ص ٣٢٨

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

منهما عن الأخرى من الناحيه المنطقيه ولا يمكن ان تقوم علاقـــه لزوم بينهما[١].

٤ – التداخل :

وهو يقوم بين قضيتين مختلفتين كما لا كيفا أى انه يكون بين الكليه الموجبه والجزئيه الموجبه ، وبين الكليه السالبه والجزئيه السالبه . والحكم فى القضيتين المتداخلتين هـــو انه اذا صدقت الكليه صدقت الجزئيه المتداخله معها وليـــس العكس واذا كذبت الجزئيه كذبت الكليه المتداخله معها وليـس العكس . ومن ثم فانه طبقا لوجهه نظر المنطق التقليدى تكـون الاستدلالات التاليه صحيحه :

١) اذا صدقت " كل أ هى ب " تصدق بعض أ هى ب "

٢) اذا صدقت " لا أ هى ب " تصدق " بعض أ هى ب "

٣) اذا كذبت " بعض أ هى ب " كذبت " كل أ هى ب "

٤) اذا كذبت " بعض أ ليس ب " كذبت " كل أ ليس ب "

وهذه الاستدلالات اذا ما تم صياغتها رمزيا تكون على النحو الآتــى :

١) (أ × ب/ = صفر) : ⊂ : (أ × ب ≠ صفر)

٢) (أ × ب = صفر) : ⊂ : (أ × ب/ ≠ صفر)

٣) [~ (أ × ب ≠ صفر)] : ⊂ : [~ (أ × ب/ = صفر)]

٤) [~ (أ × ب/ ≠ صفر)] : ⊂ : [~ (أ × ب = صفر)]

والصياغه الرمزيه توضح انها استدلالات غير صحيحه طبقـــا لوجهه نظر المنطق الرياضى . فالاستدلال الأول والثانى يرجع الخطأ

---

(١) انظر فى ذلك : د . محمد مهران ، مقدمه فى المنطـــق الرمزى ، ص ٢٨٦ ، ص ٢٨٧

فيهما الى الانتقال من قضايا فرضيه الى قضايا وجوديه . وكما سبق واوضحنا لا يمكن استدلال الوجود من اللاوجود ولا بد من اضافه مقدمه وجوديه لكى تكون الاستدلالات صحيحه . اما الخطأ فى الاستدلال الثالث والرابع فيرجع الى الاستدلال من قضيه وجوديه منفيه ولقد اوضحنا ذلك فى حالة التداخل ومن ثم فمن الضرورى اضافة مقدمه وجوديه .

ولكى تكون الاستدلالات القائمه على التداخل استدلالات صحيحه يجب ان تتخذ الصوره التاليه :

١) [(أ × بَ = صفر . (أ ≠ صفر)] :⊂: (أ × ب ≠ صفر)

٢) [(أ × ب = صفر . (أ ≠ صفر)] :⊂: (أ × بَ ≠ صفر)

٣) [~ (أ × ب ≠ صفر) . (أ ≠ صفر)] :⊂: (أ × بَ ≠ صفر)

٤) [~ (أ × بَ ≠ صفر) . (أ ≠ صفر)] :⊂: [~ (أ × ب = صفر)]

٣ – **الاستدلالات المركبه :**

لقد سبق واوضحنا ان الاستدلال القائم على التقابل يحتوى اما على استدلالات بسيطه او مركبه . فالاستدلال القائم على التناقض يمثل استدلالا بسيطا ، اما بقيه انواع التقابل من تضاد ودخول تحت التضاد وتداخل فكلها استدلالات مركبه .

ولكن الاستدلالات المركبه نفسها تنقسم الى نوعين :

– استدلالات بحته pure
– واستدلالا مختلطه mixed

فالاستدلالات البحته هى تلك التى تحتوى على قضايا لها نفس الكم . اما الاستدلالات المختلطه فهى تلك التى تحتوى على قضايا ذات كم مختلف . وسوف نتناول هذين النوعين كل على حده كما يلى :

أولا: **الاستدلالات المركبه البحتــه :**

مثــال(١) :

اذا قلنـا :

" لا حر خائن وكل عربى حر لذلك لا عربى خائن "

من الواضح ان هذا استدلال يتكون من مقدمتين كليتيـــــن ونتيجه كليه أيضا بالصوره التاليه :

لا ب هى ج
كل أ هى ب
____
∴ لا أ هى ج

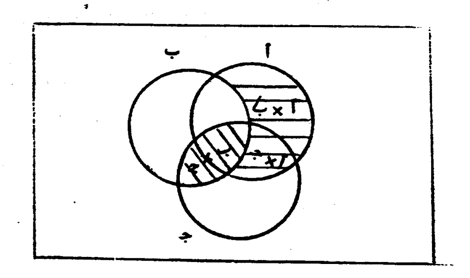
وتكون صياغته الرمزيه علىالنحو التالى :

[ب × ج = صفر ۰ أ × ب/ = صفر)] :⊂: (أ × ج = صفر)

ويمكن التأكد من صحة هذا الاستدلال اما باستخدام شكـــــل ڤن او باستخدام الاختبار الرمزى الموسع ۰ وسوف نقـــــوم باجراء كلا النوعين على النحو الاتى :

١) **اختبار صحة الاستدلال باستخدام شكل ڤـن :**

لكى نتحقق من صحة هذا الاستدلال علينا ادخال المقدمـــــات الخاصه به على شكل ڤن فاذا ظهرت نتيجة الاستدلال فى الشكـــل كان الاستدلال صحيحا والا يكون الاستدلال غير صحيح.وبمـــــا ان الاستدلال يتكون من ثلاث فئات أ ، ب ، ج ، فإن الشكل سيحتـــوى على ثلاث دوائر تمثل كل دائره فئه من هذه الفئات ۰ وفيم يلـــى الشكل الذى ادخلنا عليه المقدمتين :



شكل(٤٠)

وفى هذا الشكل نجد ان النتيجه (أ x ج = صفر) ظهـــرت بالفعل وبذلك تكون النتيجة لازمه من المقدمتين والاستدلال صحيح .

٢) **الاختبار الرمزى الموسع :** Symbolic Expansion Test[١]

اذا ما فحصنا الاستدلال :

[(ب x ج = صفر) . (أ x ب/ = صفر)] :⊂: (أ x ج = صفر)

نجد انه يحتوى على ثلاث حدود : أ ، ب ، ج .
وان هناك حدا محذوفا من كل من المقدمتين وكذلك مــــن النتيجه .

وطالما ان الاستدلال الصحيح تكون فيه النتيجه متضمنـــه بالضروره فى المقدمات ، فاذا قمنا بتوسيع كل قضيه من القضايا الثلاث بحيث تحتوى على الحد المحذوف منها فانه يمكن مقارنـــه المقدمات مع النتيجة فيتسنى الحكم على صحه الاستدلال.

---

(١) Schipper & Schuch, A First Course in Modern Logic, p.p. 357-360.

وهناك عدة قوانين علينا تذكرها عند القيام بهـــذا الاختبار وهـــى :

١) أ = أ × ١

ويعنى هذا القانون ان اى فئه تكون متطابقه مع حاصـل ضرب الفئه نفسها والفئه الشامله . اى ان ما هو مشترك بين اى فئه والفئه الشامله هو الفئه نفسها .

٢) ١ = أ + أ/

اى ان الفئه الشامله مطابقه لأيه فئه والفئه المكمله لها.

والآن نقوم بتوضيح الخطوات الواجب اتباعها عند اجـراء الاختبار الرمزى الموسع وذلك كما يلى :

(١) **توسيع المقدمه الاولى :**

اذا ما طبقنا القانون الاول على المقدمه الاولى :

ب × جـ = صفر

فانها تصبح:

ب × جـ (١) = صفر

وطالما اننا نرغب فى ادخال الحد " أ " فى المقدمـــه الاولى ، وطالما أن أ + أ/ متطابقه مع (١) طبقـــا للقانون الثانى فانه يمكن اعادة كتابه المقدمه الاولـى كما يلى :

ب × جـ (أ + أ/) = صفر

واخيرا نطبق قانون الاستغراق فنصل الى ما يمكن ان نطلق عليه الصوره الموسعه expanded form للمقدمـــه الاولى :

(ب × جـ × أ) + (ب × جـ × أ/) = صفر

ويلاحظ ان معنى هذه الصوره الموسعه هو نفس معنى القضيـه الاصليه ب × جـ = صفر مع فارق وهو ادخال الفئه أ .

(٢) **توسيع المقدمه الثانيه :**

وما نريد ادخاله فى المقدمه الثانيه هو الحد حـ

أ x ب/ = صفر

أ x ب/ (١) = صفر   طبقا للقانون الاول

∵ ١ = جـ + جـ/   قانون عدم التناقض

∴ أ x ب/ (جـ + جـ/) = صفر   طبقا لقاعده الابدال

∴ (أ x ب/ x جـ) + (أ x ب/ x جـ /) = صفر

طبقا لقانون الاستغراق

∴ (ب/ x جـ x أ) + (ب/ x جـ/ x أ) = صفر

طبقا لقانون التبادل

(٣) **توسيع النتيجه :**

أ x جـ = صفر

∵ أ x جـ (١) = صفر   طبقا للقانون الاول

∴ أ x جـ (ب + ب/) = صفر   طبقا لقانون عدم التناقض وقاعده الابدال

∴ (أ x جـ x ب) + (أ x جـ x ب/) = صفر

طبقا لقانون الاستغراق

∴ (ب x جـ x أ) + (ب/ x جـ x أ) = صفر

طبقا لقانون التبادل

والآن علينا كتابة الاستدلال بصورته الموسعه . ومن اجل اختبار مثل هذا الاستدلال المركب من قضايا كليه فقط نرسم خطا بين كل فئه مذكوره فى النتيجه اذا كانت تقررت فى المقدمات باعتبارها فئات خاليه من الاعضاء وبذلك يكون هذا الاستدلال الكلى البحت pure universal inference صحيحا اذا كانت كل الفئات فى النتيجه فئات خاليه . ويتضح ذلك كما يلى :

(ب × جـ × آ) + (ب × جـ × آ/)=صفر. (ب/ × جـ × آ)+(ب/ × جـ/ × آ)=صفر: :

(ب × جـ × آ) + (ب/ × جـ × آ) = صفر

ومن الواضح ان الاستدلال صحيح لأن المقدمه الأولى تتضمن ان الفئه ب × جـ × آ فئه فارغه والمقدمه الثانيه تتضمن ان الفئه (ب/ × جـ × آ) فئه فارغه كذلك . ومن ثم فإن الفئات الفارغه فى المقدمات هى الفئات المؤكده فى النتيجه باعتبارها فى هويه مع الفئه الصفريه ، لذلك فالاستدلال صحيح .

وليس من الضرورى ذكر كل هذه التحويلات المتتابعه بين القضيه وصورتها الموسعه كلما استخدمنا الاختبار الرمزى الموسع. حيث اننا بعد ان اوضحنا هذه الطريقة بالتفصيل اصبح واضحا ان حاصل ضرب اى فئه مثل (آ × ب) يمكن ان يوسع مباشره كى يحتوى الفئه " جـ " باضافه آ × ب × جـ الى آ × ب × جـ/ . ويمكن ان نوضح ذلك بالمثال التالى :

مثال(٢) :

اذا قلنا :

" كل المجتهدين ناجحون وكل الطلبه مجتهدون لذلك كل الطلبه ناجحون " .

فانه استدلال كلى بحت وصورته هى :

كل ب هى جـ

كل آ هى ب

∴ كل آ هى جـ

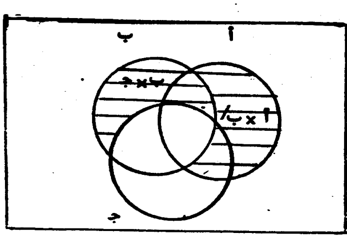
وتكون الصياغه الرمزيه على النحو الآتى :

(ب × جـ/ = صفر . آ × ب/ = صفر) :⊂: (آ × جـ/ = صفر)

وسوف نتأكد من صحة هذا الاستدلال بالطريقتين طريقه شكل فن والاختبار الرمزى الموسع .

١) **اختبار صحة الاستدلال باستخدام شكل فن :**

سوف نقوم بادخال المقدمتين على الشكل فنحصل على الشكل التالى :



شكل(٤١)

نلاحظ فى هذا الشكل(٤١) ان النتيجه (أ x جـ/ = صفر) قد ظهرت بالفعل وبالتالى فالاستدلال صحيح ٠

٢) **الاختبار الرمزى الموسع :**

الاستدلال هو :

(ب x جـ/ = صفر ٠ أ x ب/ = صفر) :⊂: (أ x جـ/ = صفر)

وكما سبق وذكرنا فانه يمكن كتابته بالصوره الموسعه مباشره كما يلى :

[(ب x جـ/ x أ) + (ب x جـ/ x أ/) = صفر ٠ (أ x ب/ x جـ) + (أ x ب/ x جـ/) = صفر)] :⊂: (أ x جـ/ x ب) + أ x جـ/ x ب/ = صفر ٠

وطبقا لقانون ترتيب الحدود يعاد كتابته كما يلى :

(ب x جـ/ x أ)+(ب x جـ/ x أ/)=صفر٠(ب/ x جـ x أ)+(ب/ x جـ/ x أ)= صفر

:⊂: (ب x جـ/ x أ) + (ب/ x جـ/ x أ) = صفر

وبفحص هذا الاستدلال نجد انه استدلال صحيح لان الفئــــات المؤكده فى النتيجه باعتبارها فئات فارغه هى نفسها الفئــات المؤكده فى المقدمات كفئات فارغه ومن ثم يمكن القول بصحـــه الاستدلال السابق .

مثال(٣) :

اذا ما اخذنا صوره الاستدلال التالى :

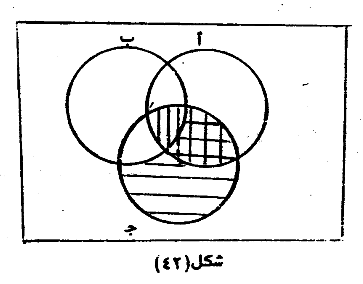
كل جـ هى ب
لا أ هى جـ
____
∴ لا أ هى ب

وصياغته الرمزيه :

[(جـ × بَ = صفر . أ × جـ = صفر)] :⊂: (أ × ب = صفر)

١- **اختبار صحة الاستدلال باستخدام شكل فــن :**

نقوم برسم شكل فن وندخل المقدمتين فيه وذلك كما يلى :



شكل(٤٢)

نلاحظ من الشكل(٤٢) ان الاستدلال غير صحيح لان النتيجـــه لم تظهر بعد ادخال المقدمات عليه .

٢ - الاختبار الرمزى الموسع :

الاستدلال هو :

(جـ × ب′ = صفر ، أ × جـ = صفر) :⊂: (أ× ب = صفر)

ويمكن كتابته بالصوره الموسعه كما يلى :

(جـ × ب′ × أ) + (جـ × ب′ × أ′) = صفر ، (أ × جـ × ب)+

(أ × جـ × ب′) = صفر : ⊂ : (أ × ب × جـ) +

(أ × ب × جـ′) = صفر

وطبقا لقانون ترتيب الحدود يكتب كما يلى :

(جـ × ب′ × أ) + (جـ × ب′ × أ′) = صفر ،

(جـ × ب × أ)+ (جـ × ب′ × أ) = صفر : ⊂ :

(جـ × ب × أ) + (جـ′ × ب × أ) = صفر

بفحص هذا الاستدلال يتضح انه غير صحيح ، حيث أن فئه واحده فقط من فئات النتيجه هى التى اكدتها المقدمه الثانيه باعتبارها فارغه وهى الفئه (جـ × ب × أ) ،
اما الفئه الباقيه فى النتيجه وهى (جـ′ × ب × أ) فلم تذكر فى المقدمات ومن ثم يكون الاستدلال غير صحيح ،

ثانيا : الاستدلالات المركبه المختلطه :

وهى - كما سبق وذكرنا - تلك الاستدلالات التى تحتوى على قضايا ذات كم مختلف ، وسوف نقوم بتوضيح ذلك ببعض الامثله كما يلى :

مثال(١) :

اذا قلنا :

" كل الناجحين سعداء وبعض الطلبه ناجحون لذلك بعض الطلبه سعداء " ،

كان هذا القول يمثل استدلالا من النوع المختلط لاحتوائه على كل من القضايا الكليه والقضايا الجزئيه ،

ويتخذ الصوره التاليه :

كل ب هى ج

بعض أ هى ب

∴ بعض أ هى ج

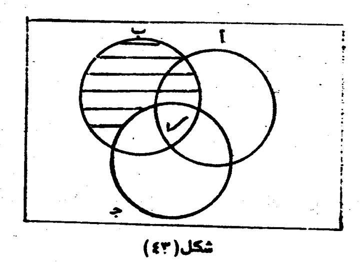
وصياغته الرمزيه :

(ب x جـ /= صفر) • (أ x ب ≠ صفر) ∴ (أ x جـ ≠ صفر)

وسوف نقوم باختبار صحة هذا الاستدلال باستخدام الطريقتين السابق استخدامهما فى الاستدلالات المركبه البحته وهما شكل ڤن والاختبار الرمزى الموسع وذلك كما يلى :

١ - اختبار صحة الاستدلال باستخدام شكل ڤن :

نقوم بادخال المقدمتين على شكل ڤن على النحو الآتى:



شكل(٤٣)

ومن الشكل يظهر ان هذا الاستدلال صحيح لظهور النتيجة (أ x جـ ≠ صفر) عند ادخال المقدمات على الشكل •

٢ - الاختبار الرمزى الموسع :

الاستدلال هو :

(ب x جـ /= صفر) • (أ x ب ≠ صفر) ∴ ⊂ (أ x جـ ≠ صفر)

وبعد اجراء التوسيع يكون الاستدلال كما يلى :

(ب × جـ/ × أ) + (ب × جـ/ × أ) = صفر ،(أ×ب× جـ) +
(أ × ب × جـ/ ≠ صفر) :⊂: (أ × جـ × ب) +
(أ × جـ × ب/) ≠ صفر) .

وطبقا لقانون ترتيب الحدود يكتب كما يلى :

(ب × جـ/ × أ) + (ب × جـ/ × أ/) = صفر .
(ب × جـ × أ) + (~~ب × جـ/ × أ~~) ≠ صفر) :⊂:
(ب × جـ × أ) + (ب/ × جـ × أ) ≠ صفر)

ويلاحظ اننا قمنا بشطب الفئه ب × جـ/ × أ من المقدمه الجزئيه لانها احدى الفئات التى تقررت باعتبارها فارغه فى المقدمه الكليه . ومن ثم فإن العضويه المؤكده فى المقدمه الجزئيه تكون ممثله فى الفئه (ب × جـ × أ) ، وطالما ان هذه الفئه قد ذكرت فى النتيجه فإن الفئه الاكثر شمولا وهى (أ × جـ × ب) + (أ × جـ × ب/) تكون ذات اعضاء . ولذلك فالنتيجه متضمنه بالضروره فى المقدمات ويكون الاستدلال صحيحا.

مثال (٢):

اذا قلنا : " لا انسان خالد وزيد انسان لذلك زيد ليس خالد " .

فان هذا القول يمثل استدلالا مختلطا متكونا من قضايا كليه وفرديه . وصورته :

لا أ هو ب
س هو أ
―――――
∴ س ليس ب

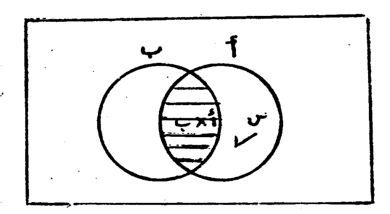
وصياغته الرمزيه :

(أ × ب = صفر ، (س ∈ أ) :⊂: (س ∈ ب/)

وسوف نقوم باختبار صحه هذا الاستدلال بشكل فن وبالاختبار الرمزى الموسع .

١) <u>اختبار صحة الاستدلال باستخدام شكل ڤن :</u>

من الواضح ان هذا الاستدلال يحتوى على فئتين فقط هما (أ ،ب) لذلك سنرسم شكل ڤن بدائرتين فقط كالاتى :



شكل(٤٤)

يوضح الشكل(٤٤) ان الاستدلال صحيح لانه بادخال المقدمات تظهر النتيجه مما يدل على تضمنها فى المقدمات .

٢) <u>الاختبار الرمزى الموسع :</u>

الاستدلال هو :

(أ x ب = صفر) ٠ (س ∈ أ) :⊂: (س ∈ ب/)

وسنجد اننا سنقوم بتوسيع المقدمه الفرديه والنتيجه فقط ٠ ويكتب الاستدلال بعد التوسيع وترتيب الحدود كما يلى :

(أ x ب = صفر) ٠ (س ∈ (أ x ب) + (أ x ب/)) :⊂:
(س ∈ (أ x ب/) + (أ/ x ب/))

ولقد قمنا بشطب (أ x ب) من المقدمه الفرديه لانه ثبت انها فارغه فى المقدمه الكليه ٠ لذلك فان العضو الفردى (س) يجب ان يكون متضمنا فى الفئه (أ x ب/).
واذا كان العضو (س) متضمنا فى الفئه (أ x ب/) فمن

الاحرى ان يكون متضمنا فى الفئه الاكثر شمولا [(آ x ب/) + (آ/ x ب/)] . ومن الواضح ان النتيجه مستنبطه من المقدمات لذلك فالاستدلال صحيح .

الفصل الخامس
حساب العلاقات

ان دراسة الحساب التحليلى للعلاقات من احدث دراسات المنطق الرياضى المعاصر ويعتبر راسل ان منطق العلاقات اوثق صلة بالرياضة من منطق الفئات او منطق القضايا لانه لا يمكن التعبير عن الحقائق الرياضيه تعبيرا صحيحا من الناحيه النظريه الا باستخدام منطق العلاقات(١). كما ترى ستبينج ان الاستنباط بأكمله انما يرتكز على الخصائص المنطقيه للعلاقات(٢).

ويعتبر كل من بيرس وشرويدر هما اول من طور نظرية العلاقات منتهجين فى ذلك نهج بول ، وان كنا نجد كذلك بعض الاشارات الطفيفه الى نظريه العلاقات فى اعمال دى مورجان . ولقد اهتم راسل بنظريه العلاقات اهتماما كبيرا وقام بتطبيقها فى مجال الرياضيات فى كتابيه "اصول الرياضيات" و " مقدمه للفلسفه الرياضيه " وكذلك فى كتابه المشترك مع وايتهد " المبادىء الرياضيه " .

ولقد اعتبر بعض من المناطقه مثل بيرس وشرويدر ان العلاقه هى اساسا " فئه ازواج " . ولقد أدى هذا التعريف الى اعتبار العلاقات نوعا من الفئات . ولقد رفض راسل هذا التعريف الماصدقى للعلاقه لأن منطق العلاقات يمثل - فى نظره - منطقا مختلفا عن منطق الفئات . ولذلك يجب ان يكون تعريف العلاقه فى ضوء الماصدق والمفهوم معا . فاذا اعتبرنا العلاقه " فئه ازواج " فلا بد ان يكون لهذا الزوج معنى بحيث يكون الزوج (س ،ص) مختلفا عن الزوج (ص ، س) الا فى حالة الهوية بين " س " ، " ص " . ومن ثم يمثل الترتيب معنى للعلاقه ، فالعلاقه التى تتجه من س الى ص تختلف عن تلك التى تتجه من ص الى س.

---

(١) راسل ، اصول الرياضيات ، ص ٦٠

(٢) Stebbing, A Modern Elementary Logic, p. 81.

تعريف العلاقة :

نحن نعلم جميعا ان الافراد – فى هذا الكون – لا يعيش كل منهم بمعزل عن الاخر ، بل الكل يترابط بانواع مختلفة من العلاقات . فيتعلق الافراد كل منهم بالاخر بعلاقات القرابة ، الصداقة والمحبة وغيرها . وكذلك الاشياء الفيزيائية يتعلق بعضها ببعض على نحو ما بعلاقات الجاذبية او بعلاقات مكانية وهكذا . وليست الاشياء او الافراد فقط هى التى تتداخل فى علاقات بل هناك ايضا علاقات بين خواص هذه الاشياء مثل علاقة اللزوم والاتساق وعدم الاتساق .... الخ.(١)

وترتبط العلاقات المختلفة بين عدد ما من الحدود . فمن أهم سمات العلاقة هو عدد الحدود التى تتطلبها هذه العلاقة حتى تكون ذات معنى . فهناك علاقات تتطلب حدين كى يتحقق معناها مثل " والد " ، " يحب " ، " يؤذى " فنقول مثلا " س والد ص " و " ص يحب س " ومثل هذه العلاقات تسمى بالعلاقات الثنائية dyadic ذلك انها تربط بين حدين . اما العلاقات التى لا يتحقق معناها الا بثلاثة حدود فتسمى ثلاثية triadic مثل " بين " ، "أعطى " مثلما نقول : "الكتاب بين القلم والمسطرة " و " محمد اعطى على كتابا " ، فهذه علاقات ثلاثية . وهناك علاقات ذات اربعة حدود وتسمى رباعية tetradic وهناك كذلك علاقات خماسية pentradic وهكذا . اما العلاقات التى تتطلب عددا لا محددا من الحدود فتكون علاقات متعددة الحدود polyadic الا ان ما سنتناوله من علاقات هو العلاقات الثنائية فقط .

ولكل علاقة اتجاه تسير فيه فمثلا علاقة " والد " تسير من " الاب " الى " الابن " . والحد الذى تبدأ منه العلاقة يسمى بطرف البداية referent ، اما الحد الذى تتجه له العلاقة فيسمى طرف النهاية ، relatum ففى قولنا " أحمد والد عمرو"

---

(١) المرجع السابق ، ص ٨٢

يكون " احمد " هو طرف البدايه و " عمرو " هو طرف النهايه .

ونطاق domain العلاقه هو فئه الحدود التى تكون لهـا هذه العلاقه . فمثلا علاقه " والد " نطاقها هو كل الافراد الذين يمكن ان تكون لهم هذه العلاقه ، اى ان نطاق العلاقه هو كـل اطراف البدايه الممكنه للعلاقه(١). اما النطاق العكسى converse domain هو فئه الحدود التى يرتبط بهـا افراد نطاق العلاقه ذاتها(٢). اى تمثل فئة الافراد الذين يمكن ان يكونوا ابناء فى العلاقه " والد " ، اى كل اطراف النهايـه الممكنه للعلاقـه .

ويمثل مجموع النطاق والنطاق العكس معا ما يسمى بمجـال field العلاقه . فاذا كانت الابوه هى العلاقه سيكون الابـاء هم نطاق هذه العلاقه والابناء نطاقها العكس ، ويكون الابـاء والابناء معا مجالها(٣).

وسوف نستخدم الرموز ع ، ح كمتغيرات للدلاله علـى العلاقات ايا كانت ، والرموز س ، ص ، ط للدلاله على الافـراد أيا كانت . فلو قلنا مثلا " س أخ ص " كانت الصياغه الرمزيـه لها على النحو الآتى :

" س ع ص "

ونستخدم علامه النفى " / " لسلب العلاقه فالصوره السالبه للعلاقه السابقه هى :

" س ع/ ص "

اى ان " ع/ " هى نفى " ع "

---

(١) المرجع السابق ، ص ٨٣
(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع
(٣) راسل ، اصول الرياضيات ، ص ١٧٠

خواص العلاقـات :

يوجد كثير من الخواص التى تحوزها العلاقات ذاتها وسـوف نتناول بعضا من اشهر هذه الخواص ، وسنقتصر فى تناولنا لهـا على العلاقات الثنائيه .

وسوف نتناول على وجه التحديد خصائص التماثـل ، التعدى و الانعكاس وذلك كما يلى :

أولا: التماثـل : Symmetry

تتصف العلاقات بالتماثل اذا كانت تحقق التبادل فى الاتجاه. اى انها يمكن ان تقوم بين طرف النهايه وطرف البدايه مثلما تقوم بين طرف البدايه وطرف النهايه . اى اذا كانت العلاقـه " ع " قائمه بين (س ، ص) فهى تقوم كذلك بين (ص ،س). اى ان العلاقه " ع " تكون تماثليه اذا ما كانت (س ع ص) تكـون ايضا (ص ع س) . وهذا ما تعبر عنه الصياغه الرمزيه التاليه[١]:

(س) (ص) [(س ع ص) ⊂ (ص ع س)]

وتقرأ : " بالنسبه لأى س ، ص فانه اذا كانت (س ع ص) يلزم عن ذلك (ص ع س) "

وكأمثله على العلاقات المتصفه بالتماثل العلاقـات : " متزوج " ، " مساو " ، " فى هويه مع " . فمثلا اذا قلنـا " درجات زيد مساويه لدرجات عمرو " فانه يمكن القول " درجات عمرو مساويه لدرجات زيد " . وايضا اذا قلنا " احمد متـزوج ليلى " يمكن القول " ليلى متزوجه احمد " .

ولكن هناك علاقات لا يمكن ان تتصف بالتماثل ذلك انهـا تكون ذات اتجاه واحد فقط اى انها تتحقق بين طرف البدايـه وطرف النهايه فقط ولا يمكن تحققها عكسيا . وتتصف هذا النـوع

(١) Copi, I. M., Symbolic Logic, New York, 3rd. edt., 1967, 151.

من العلاقات بانها لا تماثليه asymmetrical .

فالعلاقات اللاتماثليه هى التى اذا كانت قائمه بين (س ،ص) لا يمكن ان تقوم بين (ص ،س) . فالعلاقه ع تكون لا تماثليه اذا كانت (س ع ص) فلا يمكن ان تكون (ص ع س). وهذا ما يعبر عنه رمزيا على النحو الآتى[١] :

(س) (ص) [(س ع ص) ⊃ ~ (ص ع س)] .

وتقرأ : بالنسبه لأى س ، ص فانه اذا كانت (س ع ص) فانه يلزم عن ذلك من الكذب ان تكون (ص ع س) . وعلاقات مثل " والد " " اكبر من " . تتصف باللاتماثل لاننا اذا قلنا " س والد ص " لا يمكن القول ان " ص والد س " واذا قلنا " س اكبر من ص " لا يمكن القول ان " ص اكبر من س " .

وهناك علاقات تتصف بكونها جائزه التماثل non-symmetry اذا كان يمكن ان تقوم العلاقه بين طرف النهايه وطرف البدايه مثلما تقوم بين طرف البدايه وطرف النهايه . فالعلاقه " ع " تكون جائزه التماثل اذا ما كانت (س ع ص) فانه من الجائز ان يكون (ص ع س) . ويمكن توضيح العلاقه الجائزه التماثل بعلاقات مثل " يحب " ، " يكره " . فاذا قلنا " محمد يحب عمر" فان " عمر قد يحب اولا يحب محمد " .

ثانيا: التعدى :

اذا كانت خاصيه التماثل تميز العلاقات التى تربط بين حدين فان خاصيه التعدى تميز العلاقات التى تربط بين زوجين من الحدود بينهما حد مشترك . فاذا ما كانت هناك علاقه بين (س ،ص) وكانت العلاقه نفسها بين (ص ،ط) فانه يلزم ان تقوم تلك العلاقه بين (س ،ط) . فالعلاقه ع تكون متعديه اذا كانت

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

(س ع ص) ، (ص ع ط) اذن (س ع ط) . وهو ما يعبر عنه بالصياغه الرمزيه الاتيه :[1]

(س) (ص) (ط) [(س ع ص) . (ص ع ط) ⊃ (س ع ط)]

وتقرأ : انه بالنسبه لأى س ، ص ، ط اذا كانت(س ع ص) وكانت (ص ع ط) فانه يلزم ان تكون (س ع ط) .والعلاقات " اكبر من " ، " اصغر من " " مساوٍ " . هى كلها امثله على العلاقات التى تتسم بانها متعديه . فلو قلنا مثلا :

احمد اصغر من عمرو
وعمرو اصغر من محمد

يلزم من ذلك ان احمد اصغر من محمد .

وتتسم العلاقه بانها لا متعديه intransitive اذا كانت س فى علاقه مع ص ، ص فى علاقه مع ط ، ولكن س لا يمكن ان تكون لها نفس العلاقه مع ط . فالعلاقه ع تكون لا متعديه اذا كانت (س ع ص) ، (ص ع ط) ولكن لا يمكن ان تكون (س ع ط) . وتكون الصياغه الرمزيه لها على النحو الآتى :

(س)(ص) (ط) [(س ع ص)·(ص ع س)⊃∼(س ع ط)]

اى انه بالنسبه لأى س ، ص ، ط اذا كانت (س ع ص) (ص ع ط) فانه من الكذب ان تكون (س ع ط) .

ومن الامثله على العلاقات اللامتعديه علاقه " والد " فاذا قلنا : " احمد والد محمود " ، " محمود والد عصام " فلا يمكن ان ننتقل من ذلك الى القول بأن " احمد والد عصام " .

وتتصف العلاقه بانها جائزه التعدى non-transitive اذا كانت س فى علاقه بعينها مع ص ، ص فى نفس العلاقة مع ط

---

(١) المرجع السابق ، ص ١٥٢

وبناء على ذلك فان س قد تكون او لا تكون فى نفس العلاقـــــه مع ط . فالعلاقه ع تكون جائزه التعدى اذا كانت (س ع ص) و (ص ع ط) وقد تكون او لا تكون (س ع ط) .

ومن الامثله على العلاقات جائزه التعدى علاقات " صديـــق " " يحب " ، " يكره " فمثلا اذا قلنا :

سامى صديـــق محمد

محمد صديق عمــرو

اذن سامى قد يكون او لا يكون صديقـا لعمـــــرو

ثالثا : الانعكـــاس : Reflexiveness

تتصف العلاقه بانها انعكاسيه اذا كانت تقوم بين الشـــىء ونفسه . اى اذا كانت :

س ع س

وعلاقه "فى هويه مع " من العلاقات التى تتصف بانهـــــا انعكاسيه لأن أى شىء هو فى هويه مع نفسه أى ان " س = س " دائما.

ولكن قد تتصف العلاقه بعدم الانعكاس irreflexive اذا لم تكن قابله للربط بين الحد ونفسه مثل علاقه " والــــد" ، " اكبر من " . فالفرد الواحد لا يمكن ان يكون " والد نفســـه" او " اكبر من نفسه " . ولذلك فالصياغه الرمزيه لها :

$\sim$ (س ع س)

واحيانا ما تتصف العلاقه بانها جائز الانعكـــــــــاس non-reflexive وهى العلاقة التى قد تربط او لا تربـــــط بين الحد ونفسه مثل " يكره " ، " يحب " . فالفرد قد يحـــب نفسه وقد لا يحب نفسه . وقد يكره الفرد نفسه وقد لا يكرههــــا فليس هناك ضرورة فى ذلـــك .

تصنيف العلاقات طبقا لعدد الحدود :

يمكن تصنيف العلاقات على أساس عدد الحدود التى تمثل طرفى البدايه والنهايه للعلاقه الى أربعه انواع وذلك كما يلى :

أولا : علاقة واحد بكثير : One-many relation

علاقة واحد بكثير هى علاقه تربط بين حد واحد فقط فى طرف البدايه بحد آخر أو اكثر من حد فى طرف النهايه .

ويرى راسل ان علاقه واحد بكثير ان هى الا دالات وصفيه descriptive functions لانها تصف حدا محددا definite term [١]. ويمكن توضيح ذلك بعلاقه " والد" التى تعبر عن علاقه واحد بكثير . فلو قلنا " والد احمد " فإن هذا القول يصف ويحدد شخصا بعينه ولا يكون هناك اكثر من شخص يتصف بهذه العلاقه حيث انه لا يمكن ان يكون لأحمد اكثر من والد. ولكن قد يكون هناك ابناء آخرين غير " احمد " لهذا الشخص . وبذلك فان علاقه " والد " تربط بين حد واحد من افراد النطاق فى طرف البدايه بحد او اكثر من افراد النطاق العكس فى طرف النهايه . كما يحدد اختيار حد من النطاق العكس حدا من النطاق وليس العكس[٢].

فاهم ما تتصف به علاقه واحد بكثير هو استحالة ان يكون هناك أكثر من حد واحد فى طرف البدايه ، اما طرف النهايه فقد يشتمل على حد او اكثر .

ويلاحظ ان كل الدالات الرياضيه انما تمثل علاقات واحد بكثير مثل " لوغاريتم لـ س " ، " جيب التمام لـ س " فكلها

---

(١) Russell, Intro. to Mathematical Philosophy, p. 45.

(٢) Stebbing, A Modern Elementary Logic, p. 86.

دالات وصفيه تكون فيها " س " هى الحجه (١). ومثلها مثل " الحد الذى له العلاقة ع مع س " او بالصياغه الرمزيه " الـ ع لـ س " " The R of x " . حيث تكون " ع " علاقة واحد بكثير .

واذا كانت " الـ ع لـ س " تصف حدا محددا فانه يجب ان تكون " س " حدا يكون لشيء ما العلاقة " ع " به . ويجب الا يكون هناك اكثر من حد واحدله العلاقة "ع" لـ "س" طالما ان اداة التعريف " آل " " the " تتضمن الوحده (٢).

ثانيا: علاقة كثير بواحد : many-one relation

وهى عكس علاقه واحد بكثير لانها تربط بين فرد واحد من افراد النطاق العكسى فى طرف النهايه بفرد واحد او اكثر من افراد النطاق فى طرف البدايه .

ويمكن توضيح علاقه كثير بواحد بعلاقه " ابن " فاذا قلنا " س ابن ص " . فانه قد يكون هناك اكثر من " س " واحد ولكن " ص " يكون واحدا فقط . فلو اخترنا اى فرد من افراد النطاق ليمثل " س " وليكن " عمرو " فانه يتحدد له أب واحد وليكن " محمد " دون ان يكون للفرد " س " نفس العلاقه مع اى شخص آخر. فتحديد الابن يحدد الأب اما تحديد الأب فلا يحدد الابن . لانه قد يكون للأب عدة أبناء .

وعلى ذلك فإن العلاقه تكون علاقه كثير بواحد عندما يكون اختيار حد من النطاق هو الذى يحدد اختيار الحد من النطاق العكسى وليس العكس (٣).

---

(١) Russell, Intro-to Mathematical Philosophy, p. 45.

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٣) Stebbing, A Modern Elementary Logic, p. 86.

ثالثا: علاقة كثير بكثير : many-many relation

تكون العلاقه " ع " كثيراً بكثير عندما يحتوى كل من النطاق والنطاق العكسى على اكثر من عضو واحد ، وكذلك عندما لا يحدد اختيار حد من اى منهما اختيار الحد من الاخر(١).

ويمكن التمثيل لعلاقه كثير بكثير بعلاقات مثل " اخت "، " أخ " . فاذا قلنا " س اخت ص " واخترنا احد افراد النطاق ليمثل " س " فإن هذا الاختيار لا يحدد من يكون" ص " اذا كان لـ " س " اخوه كثيرون . والعكس صحيح اى اذا بدأنا بتحديد " ص " فإن هذا التحديد لا يحدد لنا من تكون " س " لان علاقه الاخوه قد تربط كثيرات بـ " ص " اذا كان له اكثر من اخت .

رابعا: علاقة واحد بواحد One-one relation

تكون العلاقه " ع " علاقه واحد بواحد اذا كان اختيار طرف البدايه يحدد اختيار طرف النهايه والعكس صحيح(٢). فقد يكون هناك كثير من الاعضاء فى كل من النطاق والنطاق العكسى للعلاقه " ع " لكن اختيار اى حد واحد من هذه الحدود باعتباره طرف بدايه يحدد احاديا اختيار طرف النهايه والعكس.

اى ان علاقه واحد بواحد تقدم ارتباطاً متبادلاً بين فئتين بحيث يكون كل حد فى فئه له ما يرتبط به فى الفئه الاخرى(٣) . ويمكن ادراك هذا الترابط المتبادل عندما لا يكون بين الفئتين اعضاء مشتركه مثل " فئه الأزواج " و " فئه الزوجات " فى حالة عدم تعدد الأزواج وكذلك عدم تعدد الزوجات حيث يمكن ربط كل فرد من"فئه الازواج" بكل فرد من " فئه الزوجات " .

وتتضح اهميه علاقه واحد بواحد فى العلوم الرياضيه فمثلا يمكن ربط كل عدد صحيح بمربع هذا العدد,فمثلا اذا كان لدينا

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٣) Russell, Intro. to Mathematical Philosophy, p. 48.

الاعداد الصحيحه التاليه :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

وكان لدينا مربع هذه الاعداد :

١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥

لاتضح لنا علاقة واحد بواحد بين هذين الفئتين كما يلى:

العدد	مربع العدد
١	١
٢	٤
٣	٩
٤	١٦
٥	٢٥

وتمثل علاقات واحد بواحد أهميه كبرى فى العلوم الدقيقه حيث تكون الارتباطات فى هذه العلوم ان هى الا علاقات واحد بواحد .

عوامل الاجراء الخاصه بالعلاقات :

تماثل عوامل الاجراء الخاصه بالعلاقات تلك الخاصه بالفئات - وفيما يلى سنقدم بشيء من الايجاز بعضا من هذه الاجراءات .

أولا: اجراء التضمن :

اذا كانت العلاقه " ع " متضمنه فى العلاقه " ح " فإن الصياغه الرمزيه لذلك تكون على النحو الآتى :

ع ⊃ ح

ويكون التضمن بين العلاقتين " ع " و " ح " صادقا اذا حدث انه " كلما ربطت " ع " بين شيئين ، ربطت " ح " بينهما كذلك"[1]. او بعبارة اخرى :

" اذا كانت - بالنسبه لأى س ، ص - الصيغه التاليه (س ع ص) تستلزم الصيغه التاليه (س ح ص) " .

فمثلا اذا كانت (س اصغر من ص) فان ذلك يستلزم ان تكون (س ليست فى هويه مع ص) اى ان :

(س < ص) ⊃ (س ≠ ص)

ومن ثم فإن علاقه " اصغر من " تكون متضمنه فى علاقه " تختلف عن " .

ثانيا: الهويه :

تكون هناك هويه بين أى علاقتين " ع " ، " ح " اذا كانت العلاقتان " ع " ، " ح " تربطان بين الاشياء نفسها . ومن ثم فإن كل منهما تكون متضمنه فى الاخرى .

أى ان :

" ع " = " ح "

اذا كانت :

(س) (ص) (س ع ص) ⊃ (س ح ص) . (س ح ص) ⊃ (س ع ص)

---

(١) تارسكى ، مقدمه للمنطق ، ص ١٢٨

ثالثا : الجمـــع :

اذا كنا قد سبق ورمزنا للجمع بين القضايا بالرمز " ∨ " ورمزنا للجمع بين الفئات بالرمز " + " فانه عاده ما يرمـــز للجمع بين العلاقات بالرمز " ∪ " . وبذلك يمكن ان نكتب حاصـل جمع او توحيد العلاقتين " ع " ، " ح " بالصيـاغه الرمزيـــه التالـيــه (١).

ع ∪ ح

والصياغه " ع ∪ ح " تربط بين اى شيئين اذا كانـــت [illegible] العلاقتين " ع " أو " ح " على الاقل تربط بينهمـــــا [illegible] الصياغه :

س (ع ∪ ح) ص

تكون مكافئه للشرط التالى :

(س ع ص) ∨ (س ح ص)

اى اذا كانت " ع " تعبر عن علاقه " أخ " وكانت " ح " تدل على علاقه "اطول من " . فإن ذلك يعنى ان " س أطول من ص او س أخ ص او ان س أخ ص واطول منه فى نفس الوقت " .

رابعا: الضـرب :

ويرمز لحاصل الضرب او التقاطع بين العلاقات بالرمز" ∩ " فاذا كان لدينا العلاقتين " ع " ، " ح " فان الصياغه الرمزيه لحاصل الضرب المنطقى بينهما تكون على النحو الآتى (٢):

ع ∩ ح

---

(١) المرجع السابق ، نفس الموضع

(٢) المرجع السابق ، نفس الموضع

وتعنى الصياغه (ع ⋂ ح) ان هناك حدا ما وليكن" س " يرتبط بالعلاقه " ع" مع حد اخر وليكن " ص " ويرتبط معه ايضا بالعلاقه " ح " اى ان :

ع ⋂ ح ≡ (س) (ص) (س ع ص) . (س ح ص)

فاذا كانت " ع " تدل على العلاقه " أخ " و كانت " ح " تدل على علاقه " اكبر من " فإن :

س (ع ⋂ ح) ص

تكون صادقه اذا كان " س " أخ " ص " واكبر منه فى نفس الوقت .

واذا كان يطلق على حاصل الضرب السابق احيانا اسم حاصل الضرب المطلق فان هناك اجراء جديدا يسمى بحاصل الضرب النسبى[1] . ويساعد حاصل الضرب النسبى على ان تكوّن من علاقتين معنيتين ع ، ح علاقه ثالثه وهى ما يُسمى بحاصل الضرب النسبى للعلاقتين ع ، ح ، ويرمز لها بالصياغه التاليه :

ع / ح

وهذه العلاقه لا تربط بين الحدين (س) ،(ص) الا اذا كان هناك حد ثالث هو (ط) بحيث تكون (س ع ط) وتكون (ط ح ص) فى نفس الوقت .

فمثلا اذا كانت " ع " هى علاقه " زوج " ، وكانت " ح " هى علاقه " ابنه " كانت ع / ح تربط بين شخصين هما س ، ص . اذا وجدت انسانه هى ط بحيث يكون س هو زوج ط ، وتكون ط هى ابنه ص[2] . وبذلك تتفق العلاقة ع / ح مع العلاقة " زوج الابنه " .

---

(١) المرجع السابق ، ص ١٣٠
(٢) المرجع السابق ، ص ١٣١

خامسا : النفــــى :

اذا كنا نرمز للعلاقه بالرمز " ع " فان نفى هذه العلاقه هو الرمز :

ع/

ويلاحظ ان نفى العلاقه يربط بين الشيئين اللذين لا تربط بينهما العلاقه ذاتها . اى اذا كانت ع لا تربط بين (س) ، (ص) فان ع/ هى التى تربط بينهما . فاذا كانت ع تدل على علاقه "يحب" وكانت هذه العلاقه غير متحققه بين(س) ،(ص) فان نفى هذه العلاقه هو الذى يتحقق بينهما اى يكون :

س ع/ ص

٥) المبرهنات القائمه على العلاقات :

يعتمد استنتاج نتيجه صحيحه من قضايا العلاقات على الخواص المنطقيه للعلاقه . وترتكز صحة المبرهنات المحتويه مقدمات ذات علاقات متعدية على تعدى العلاقه . كما يجب ان تبقى العلاقه فى النتيجه كما هى فى المقدمات(١).

وسوف نقتصر على تقديم بعض الامثله لمبرهنات العلاقه لتوضيح الصحيح منها وغير الصحيح . وذلك كما يلى :

أولا: مبرهنات متعديه تماثليه :

مثال (١) :

مساحه س (مساويه) لمساحه ص
مساحه ص (مساويه) لمساحه ط

∴ مساحه س (مساويه) لمساحه ط

(١) Searles, Logic and Scientific Methods, p. 189.

مثال (٢):

المثلث س (فى هويه مع) المثلث ص
المثلث ص (فى هويه مع) المثلث ط

∴ المثلث س (فى هويه مع) المثلث ط

نجد فى المثال(١) ان العلاقه فى المقدمات والنتائج هى علاقة التساوى وفى المثال(٢) العلاقه هى علاقه الهويه . وكما سبق وأوضحنا فإن علاقات الهويه والتساوى تتصف بكونها متعديه وتماثليه . ولذلك كانت النتائج فى المثالين (١) ،(٢) نتائج صحيحه بسبب خاصيه التعدى .

ثانيا: مبرهنات لا تماثليه متعديه :

مثال(١) :

احمد (اكبر من) عمرو
عمرو (اكبر من) سعيد

∴ احمد (اكبر من) سعيد

مثال(٢) :

محمد (اطول من) على
على (اطول من) زيد

∴ محمد (اطول من) زيد

تتصف العلاقات (اطول من) و (اكبر من) بانها متعديه . ولا تماثليه والنتائج صحيحه لارتكازها على خاصية التعدى .

ثالثا: مبرهنات جائزة التماثل ومتعدية :

وترتكز هذه المبرهنات على مقدمات محتويه على علاقـــات تتسم بكونها جائزة التماثل ومتعدية ويتضح ذلك بالامثلة الاتيه:

مثال(١):

النجاح يستلزم العمل
العمل يستلزم الجهد
___
∴ النجاح يستلزم الجهد

مثال(٢):

كل انسان محتوى فى فئة الفانين
كل اغريقى محتوى فى فئة الناس
___
∴ كل اغريقى محتوى فى فئة الفانين

فالعلاقات " يستلزم " و " محتوى فى " علاقات جائـــزة التماثل ومتعدية والمبرهنات صحيحة لكونها مرتكزة على تعــدى هذه العلاقات .

رابعا: مبرهنات تماثلية ولا متعدية :

اذا ما كانت المبرهنات السابقة صحيحة لارتكازها علــى تعدى العلاقة فان المبرهنة التالية تكون غير صحيحة لارتكازهـا على علاقة لا متعدية وذلك فى المثال التالى :

احمد نقيض عمــرو
عمرو نقيض زيــد
___
∴ احمد نقيض زيــد

من الواضح ان المبرهنة السابقة غير صحيحة لأن علاقـــة " نقيض " لا متعدية لانه اذا كان (احمد نقيض عمرو) وكـــان (عمرو نقيض زيد) كان احمد مثله مثل زيد وليس نقيضه .

خامسا : مبرهنات لا تماثليه ولا متعديه :

المبرهنات القائمه على العلاقات اللاتماثليه واللامتعديـه تؤدى الى نتيجه غير صحيحه اذا ما كانت العلاقه القائمه فـــى المقدمات هى نفسها فى النتيجه ويتضح ذلك من المثال التالى:

محمود (والد) احمد
احمد (والد) عمرو

∴ محمود (والد) عمرو

من الواضح ان النتيجه السابقه خاطئه لبقاء علاقه " والد " فى النتيجه كما هى فى المقدمات فاذا ما تغيرت الى علاقـــه " جد " وأصبحت النتيجه " محمود جد عمرو " تصبح المبرهنـــه السابقه صحيحه .

سادسا : مبرهنات جائزة التماثل ولا متعديه :

تكون النتائج فى المبرهنات القائمة على علاقات جائـــزه التماثل ولا متعديه ، نتائج لا يمكن البت فى صحتها او عـــدم صحتها لأن العلاقه الجائزه التماثل قد تتحقق او لا تتحقق الـــى جانب انها لا متعديه فلا يمكن ان نصل منها الى نتيجه ويمكـــن توضيح ذلك بالمثال الآتى :

سناء صديقه سميره
سميره صديقه فاطمه

∴ سناء صديقه فاطمه

فالنتيجه (سناء صديقه فاطمه) غير مؤكده وقد تكـــون صحيحه وقد تكون غير صحيحه فهى ليست لازمه .

سابعا: مبرهنات تماثليه وجائزه التعدى :

لا يمكن البت فى صحه نتائج المبرهنات القائمه علـــــى العلاقات التماثليه والجائزه التعدى . ويتضح ذلك من المثـــال الاتى :

راتب س (يختلف عن) راتب ص
راتب ص (يختلف عن) راتب ط

∴ راتب س (يختلف عن) راتب ط

ثامنا : مبرهنات لا تماثليه وجائزه التعدى :

ان علاقة " عضو فى " القائمه بين الفرد والفئه - أى علاقه العضويه فى فئه - هى علاقه لا تماثليه وجائزه التعدى. وتـــؤدى المبرهنات القائمه عليها الى نتيجه غير مؤكده وذلك كما فـــى المثال الاتى :

الطالب (عضو فى) الكليه
الكليه (عضو فى) الجامعه

∴ الطالب (عضو فى) الجامعه

وكذلك من الامثله على العلاقات اللاتماثليه الجائـــــزه التعدى علاقه " يساعد " وذلك كما فى المبرهنه التاليه :

س (يساعد) ص
ص (يساعد) ط

∴ س (يساعد) ط

تاسعا: مبرهنات جائزه التعدى وجائزه التماثل :

ونذكر كمثال لها الاتى :

س (يحب) ص
ص (يحب) ط

∴ س (يحب) ط

والواقع ان المبرهنات القائمه على العلاقات ليست فى حاجه الى مبادئ جديده . حيث يمكن اقامة البراهين الصوريه لاثبات صحة هذه المبرهنات طبقا لقواعد الاستدلال وقواعد التسوير السابق استخدامها فى كل من حساب القضايا وحساب الدالات .

وخاتمه لهذا الكتاب آمل ان اكون قد حققت ما اردته من خروج على الكلاسيكيه المألوفه فى عرض المنطق الرياضى . حيث ترتكز هذه الرؤيه الحديثه على اقامه حساب الدالات على اساس قيم الجهات الثلاثه : الامكان والاستحاله والضروره اتباعا لرايشنباخ كما سبق وأوضحنا فى موضعه . ومن ثم نكون اضفنا قيما جديده للصدق الى جانب قيمتى الصدق والكذب المألوفتين فى منطق راسل ، اى أننا بذلك قدمنا فعلا جديدا يستكمل المنطق الراسلى الذى يعتمد على قيمتى الصدق والكذب كحدود اوليه . الا ان هناك من يقيم المنطق بأكمله على قيم الصدق والكذب والضروره والامكان والاستحاله مثلما نجد فى منطق لويس Lewis ،

والحقيقة ان احدث ما وصل اليه المنطق الرياضى المعاصر فى تطوره ـ بعد راسل ـ هو المنطق الكثير القيم Polyvalent القائم اما على الجهات او على الاحتمال . وهذه التطورات السريعة المتلاحقة للمنطق الرياضى تدعونا الى متابعته وعدم الركون او الاكتفاء بالفترة الكلاسيكية له .

كشاف (١)

الرموز المستخدمة فى الكتـــاب

أولا: رموز خاصة بحساب القضايا :

الرمز	المعنى
ق ، ل ، م ، ن ، ...	متغيرات للقضايا
~	نفى القضيه
.	الضرب المنطقى او العطف
$\vee$	الجمع المنطقى أو الفصل
$\equiv$	التكافؤ
$\supset$	اللزوم
/	عدم الاتفاق
ص	الصدق
ك	الكذب

ثانيا: رموز خاصة بحساب دالات القضايا :

الرمز	المعنى
ح ، د ، ء ، ...	متغيرات للداله
س ، ص ، ...	متغيرات للموضوع أو الحجه
سْ^ ، صْ^ ، ...	رموز المواقع الشاغره
(س)	السور الكلى
(E س)	السور الجزئى أو الوجودى
م	صادقه دائما
ب	كاذبه دائما
ط	مختلطه

ثالثا: رموز خاصة بحساب الفئات :

س ، ص ، ...	متغيرات للمفردات الجزئيه
أ ، ب ، جـ ، ..	متغيرات للفئات
$\subset$	الاحتواء بين الفئات
$\in$	عضوية فرد فى فئه
+	الجمع المنطقى بين الفئات
×	الضرب المنطقى بين الفئات
−	الطرح المنطقى بين الفئات
=	الهويه
≠	عدم الهويه
١	رمز الفئه الشامله
صفر	رمز الفئه الفارغه
/	لنفى الفئه (أى أ/ تعنى لا أ)

رابعا: رموز خاصة بحساب العلاقات :

ع ، ح ، ط ، ...	متغيرات للعلاقات
$\cap$	الضرب بين العلاقات
$\cup$	الجمع بين العلاقات
=	الهوية
≠	عدم الهويه
/	لنفى العلاقه (أى أن ع/ تعنى لا ع)
$\supset$	التضمن بين العلاقات

كشاف (٢)

اهم المصطلحات الواردة فى الكتاب

(أ)

(ث)

(ع)

(ح)

(د)

(ش)

(ص)

(ض)

(ع)

(ق)

(ل)

(م)

المصــادر

أولا: المصادر العربية :

- تارسكى ، الفرد : مقدمة للمنطق ولمنهج البحث فى العلـوم الاستدلالية ، ترجمة د. عزمى اسلام ، الهيئة المصرية العامة للتأليف والنشر ، القاهرة ، ١٩٧٠.

- راسل ، بر تراند : اصول الرياضيات ، الجزء(١) ترجمـة د. محمد مرسى احمد ، د. احمد فؤاد الاهوانى ، دارالمعارف القاهرة ، ١٩٥٨.

- رايشنباخ ، هانز : نشأة الفلسفة العلمية ، ترجمـة د. فؤاد زكريا ، دار الكاتب العربى ، القاهرة ، ١٩٦٨ ،
- د. زكى نجيب محمود ، المنطق الوضعى ، الانجلو المصريـة ، القاهرة ، ١٩٥١.

- د. عزمى اسلام ، اسس المنطق الرمزى ، الانجلو المصريـة القاهرة ، ١٩٧٠

- د. على عبد المعطى ، المنطق ومناهج البحث العلمـى ، دار الجامعات المصرية ، الاسكندرية ، ١٩٧٧.

- د. محمد مهران : مقدمة فى المنطق الرمزى ، دار الثقافـة للنشر والتوزيع ، ١٩٨٧.

- د. محمود زيدان ، المنطق الرمزى ، نشأته وتطوره ، دارالجامعات المصرية ، الاسكندرية ، ١٩٧٢.

- د. نازلى اسماعيل ، الفلسفة الحديثة ، مكتبة الحريـة الحديثة ، القاهرة ، ١٩٧٩ .
- د. نازلى اسماعيل ، مبادئ المنطق الرمزى ، المركـز العلمى للتصوير والطباعة ، القاهرة ، ١٩٨٠.

ثانيا: المصادر الاجنبية

- Boole, G., Studies in Logic and Probability, The Open Court publishing company, 1952.
- Carnap, R., Introduction to Symbolic Logic and its Applications, Trans. by Meyer, W. H. & Wilkinson, J., New York, 1958.
- Carnap, R., The Logical Syntax of Language, The Humanities Press Inc., New York, 1951.
- Carnap, R., The Old and The New Logic, From : Logical Positivism, Edt. by Ayer, 1959.
- Cohen, M. R., & Nagel, E., An Introduction to Logic, New York, 1962.
- Copi, I. M., Introduction to Logic, 3rd. edt., London, 1969.
- Copi, I. M., Symbolic Logic, New York, 3rd. edt., 1967.
- Frege, On Sense and Nominatum, From : Readings in Philosophical Analysis, edt. by Feigl, H. & Sellars, W., New York, 1949.
- Gemignani, M. C., Basic Concepts of Mathematics and Logic, Addison, Welsey publishing Co. Inc., 1968.
- Hackstaff, L. H., Systems of Formal Logic, New York, 1969.

- Langer, S., An Introduction to Symbolic Logic, New York, 2nd. edt., 1953.

- Lewis, C. I. & Langford, C. H., Symbolic Logic, London, 1932.

- Nidditch, P. H., The Development of Mathematical Logic, The Free Press, Glenco, Illinois, 2nd. impression, 1963.

- Quine, W. V., Mathematical Logic, Harvard University Press, 1961.

- Ramsey, The Foundations of Mathematics and other Logical Essay, edt., by Braithwaite, A., London, 1931.

- Reichenbach, H , Elements of Symbolic Logic, New York, The Macmillan Comp., 6th. printing, 1960.

- Russell, B., Introduction to Mathematical Philosophy, George Allen and Unwin Ltd., London, 11th. impression, 1963.

- Russell, B., Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description, From : The Basic Writings of B. Russell, edt. by Egnen, R. E., & Denonn, L.E., 1961.

- Russell, B., On Denoting, From : Logic and Knowledge, edt. by Marsh, R. C., George Allen & Unwin Ltd., 5th. imp., London, 1971.

- Russell, B., The Philosophy of Logical Atomism, From : Logic and Knowledge.
- Stebbing,S., A Modern Elementary Logic, Methuen Co., London, 1943.
- Sear Les, H. L., Logic and Scientific Methods, 3rd. edt., The Ronald Press Co., New York, 1968.
- Schipper, E. & Schuh, E., A First Course in Modern Logic, United States of America, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1959.
- White head, A. N. & Russell, B., Principia Mathematica, Vol. 1,2nd., Cambridge, 1950.

محتويات الكتاب

رقم الايداع بدار الكتـــــب
٨٧ / ٥١٥٤